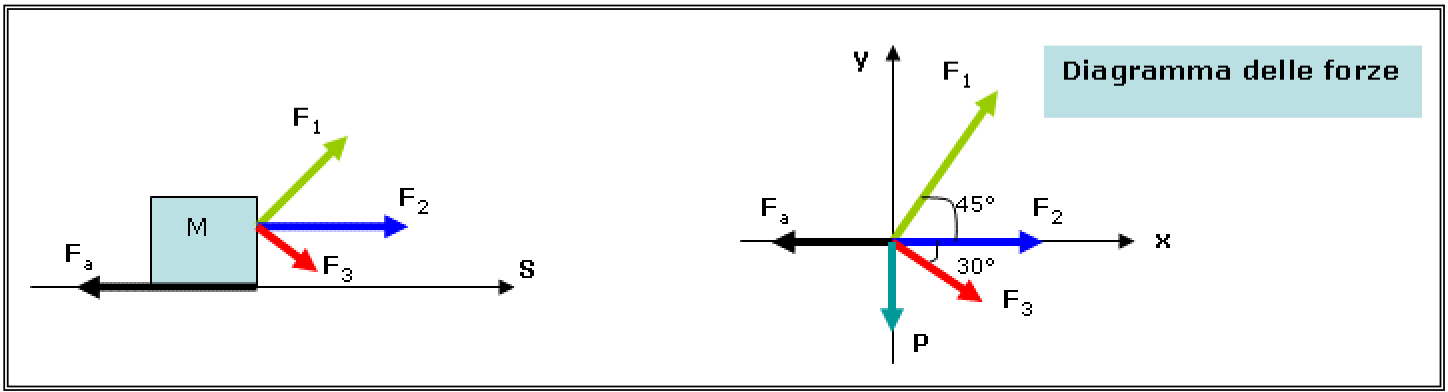
PROBLEMI DI FISICA
Principi di Conservazione dell'Energia Meccanica, della Quantità di Moto e del Momento Angolare

1. PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

- **PROBLEMA N. 1**

Su un corpo di massa M = 10kg agiscono una serie di forze F_1 = 10N F_2 = 5N F_3 = 7N F_a = 2N (forza di attrito), secondo le direzioni indicate in figura, che lo spostano di 10m. Supponendo che il corpo inizialmente è fermo, calcolare la velocità finale.

SOLUZIONE



Applichiamo il teorema dell'energia cinetica:

$$(1) \quad L_T = \Delta E_C = E_{CF} - E_{CI} = \frac{1}{2}Mv_F^2 - \frac{1}{2}Mv_I^2 \qquad \text{dove: } L_T = \sum L_i = L_1 + L_2 + L_3 + L_a$$

e risolvendo la (1) rispetto alla velocità, sapendo che inizialmente il corpo è fermo, si ottiene:

$$(2) \qquad v = \sqrt{\frac{2L_T}{M}}$$

Il problema adesso è calcolare il lavoro totale prodotto dalle forze che agiscono sul corpo. Si può procedere in due modi:

1) Calcolare la forza totale e quindi applicare la definizione di lavoro:

$$L_T = \vec{F}_T \bullet \vec{s} = F_T \cdot s \cdot \cos\alpha = 161J$$

dove:

$$F_{Tx}=\sum F_x=F_{1x}+F_2+F_{3x}-F_a=F_1\cos 45°+F_2+F_3\cos 30°-F_a=16.1N$$
$$F_{Ty}=\sum F_y=F_{1y}-F_{2y}+N-P=F_1 sen45°-F_3 sen30°=3.6N$$
$$F_T=\sqrt{F_{Tx}^2+F_{Ty}^2}=16.5N$$
$$tg\alpha=\frac{F_{Ty}}{F_{Tx}}=0.22\Rightarrow\alpha=12.6°$$

Pertanto dall'applicazione della (2) si ottiene:

$$v=\sqrt{\frac{2L_T}{M}}=\sqrt{\frac{2\cdot 161}{10}}=5{,}7m/s$$

2) Calcolare il lavoro prodotto dalle singole forze attraverso l'applicazione della definizione di lavoro e quindi sommarli algebricamente:

$$L_T=\sum L_i=L_1+L_2+L_3-L_a+L_N+L_P=161J$$

dove:

$$L_1=\vec{F}_1\bullet\vec{s}=F_1\cdot s\cdot\cos 45°=70.7N \qquad L_2=\vec{F}_2\bullet\vec{s}=F_2\cdot s\cdot\cos 0°=50N$$
$$L_3=\vec{F}_3\bullet\vec{s}=F_3\cdot s\cdot\cos 30°=60.6N \qquad L_a=\vec{F}_a\bullet\vec{s}=F_a\cdot s\cdot\cos 180°=-20N$$
$$L_N=\vec{N}\bullet\vec{s}=N\cdot s\cdot\cos 90°=0N \qquad L_P=\vec{P}\bullet\vec{s}=P\cdot s\cdot\cos 270°=0N$$

Pertanto dall'applicazione della (2) si ottiene:

$$v=\sqrt{\frac{2L_T}{M}}=\sqrt{\frac{2\cdot 161}{10}}=5{,}7m/s$$

❑ PROBLEMA N. 2

Un treno viaggia su un binario orizzontale alla velocità costante di 36 km/h. Supponendo che la locomotiva sviluppi una potenza di 200 kW per mantenere costante la velocità, determinare la forza dovuta agli attriti e alla resistenza dell'aria che si oppone al moto.

SOLUZIONE

Poiché la locomotiva si muove a velocità costante, significa che la somma vettoriale di tutte le forze che agiscono su di essa è nulla e quindi il lavoro totale è nullo; ossia la forza resistente (attrito e resistenza dell'aria) è uguale alla forza motrice sviluppata dal motore del treno, e quindi il lavoro resistente è uguale a quello motore. Pertanto, partendo dalla definizione di potenza, calcoliamo la forza resistente:

$$P=\frac{L}{t}=\frac{F\cdot s}{t}=F\cdot v\Rightarrow F=\frac{P}{v}=\frac{200\cdot 10^3}{10}=2\cdot 10^4 N$$ dove 36 km/h = 10 m/s

PROBLEMA N. 3

Un'automobile di massa 1000 kg accelera da 0 a 100 km/h in 6 s. Qual è la sua potenza, trascurando gli attriti?

In base al teorema dell'energia cinetica sappiamo che il lavoro è legato alla variazione dell'energia cinetica dalla relazione:

$$L = \Delta E_C = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Sostituendo i dati forniti dal problema e tenendo conto che l'auto parte da ferma ($v_1 = 0$), operando la conversione 100 km/h ≅ 28 m/s, otteniamo:

$$L = \Delta E_C = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1000\ \text{kg} \cdot (28\ \text{m/s})^2 = 392\,000\ \text{J}$$

e quindi:

$$L = 3{,}92 \cdot 10^5\ \text{J}$$

La potenza del motore vale perciò:

$$P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{3{,}92 \cdot 10^5\ \text{J}}{6\ \text{s}} \cong 65\,330\ \text{W} \cong 65\ \text{kW}$$

La potenza che l'auto sviluppa per raggiungere quella velocità è in realtà maggiore, perché il motore, oltre ad accelerare l'auto, deve vincere anche gli attriti, sia interni (motore, meccanismi di trasmissione, ...) sia esterni (asfalto e aria).

PROBLEMA N. 4

Quale lavoro compiono le forze di attrito dei freni di un'automobile, durante una frenata, sapendo che l'auto ha massa uguale a 1000 kg, velocità iniziale di 30 m/s e che lo spazio di frenata è uguale a 150 m?
Quanto vale l'intensità media delle forze di attrito?

LEGGI ED EQUAZIONI

Dalla relazione:

$$L = \Delta E_C = E_{CF} - E_{CI} = \frac{1}{2}mv_F^2 - \frac{1}{2}mv_I^2$$

conoscendo la massa, la velocità iniziale e quella finale dell'auto si può ricavare il lavoro. Quindi, dalla relazione:

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = F\, s \cos\alpha$$

conoscendo il lavoro, lo spostamento e l'angolo (uguale a 180°, perché la forza di attrito è parallela allo spostamento, ma di verso opposto) si ottiene l'intensità della forza.

SOLUZIONE ALGEBRICA

Le equazioni che permettono la soluzione del problema sono dunque:

$$L = \frac{1}{2}mv_F^2 - \frac{1}{2}mv_I^2 \qquad \text{e} \qquad F = \frac{L}{s\cos\alpha}$$

dove F rappresenta l'intensità della forza di attrito.

SOLUZIONE NUMERICA

Sostituendo i dati forniti dal problema si ottiene:

$$L = \frac{1}{2}mv_F^2 - \frac{1}{2}mv_I^2 = -\frac{1}{2} \cdot 1000\ \text{kg} \cdot (30\ \text{m/s})^2 = -450\,000$$

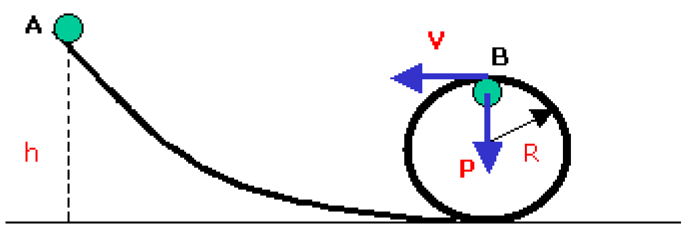
e quindi:

$$F = \frac{L}{s\cos\alpha} = \frac{-450\,000\ \text{J}}{150\ \text{m} \cdot (-1)} = 3000\ \text{N}$$

PROBLEMA N. 5

Determinare l'altezza minima dalla quale dovrebbe partire un corpo per percorrere interamente il circuito, nell'ipotesi che strisci senza attrito e che il raggio del cerchio sia 30 cm.

SOLUZIONE



Nel punto A il corpo, essendo fermo, ha solo energia potenziale, mentre in B ha sia energia potenziale che energia cinetica, che gli serve per non cadere e quindi percorrere interamente il circuito. Per calcolare l'altezza h applichiamo il principio di conservazione dell'energia meccanica, in quanto l'unica forza in gioco è la forza peso, che è una forza conservativa:

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

$$E_{M_A} = E_{M_B} \Rightarrow U_A = U_B + E_{C_A} \Rightarrow \cancel{m}gh = \cancel{m}g2R + \frac{1}{2}\cancel{m}V^2 \quad (1)$$

Nel punto B, l'accelerazione centripeta alla quale è soggetto il corpo non è altro che l'accelerazione di gravità, per cui:

$$g = \frac{V^2}{R} \Rightarrow V^2 = g \cdot R$$

Pertanto la (1) ci consente di calcolare h:

$$\cancel{g}h = 2\cancel{g}R + \frac{1}{2}\cancel{g}R \Rightarrow h = \frac{5}{2}R = \frac{5}{2} \cdot 30 = 75cm$$

PROBLEMA N. 6

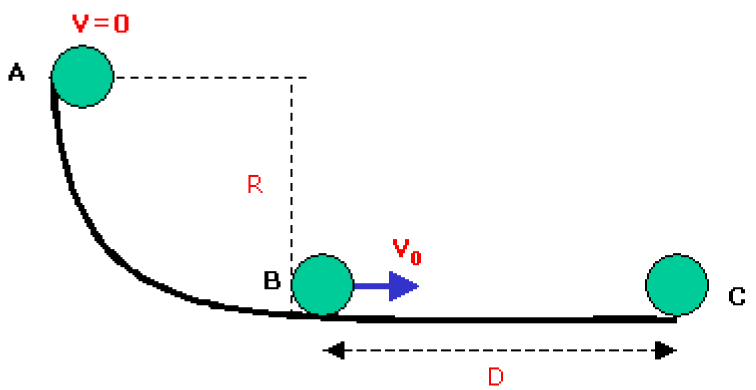
Un treno viaggia su un binario orizzontale alla velocità costante di 36 km/h. Supponendo che la locomotiva sviluppi una potenza di 200 kW per mantenere costante la velocità, determinare la forza dovuta agli attriti e alla resistenza dell'aria che si oppone al moto.

SOLUZIONE

Poiché la locomotiva si muove a velocità costante, significa che la somma vettoriale di tutte le forze che agiscono su di essa è nulla e quindi il lavoro totale è nullo; ossia la forza resistente (attrito e resistenza dell'aria) è uguale alla forza motrice sviluppata dal motore del treno, e quindi il lavoro resistente è uguale a quello motore. Pertanto, partendo dalla definizione di potenza, calcoliamo la forza resistente:

$$P = \frac{L}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v \Rightarrow F = \frac{P}{v} = \frac{200 \cdot 10^3}{10} = 2 \cdot 10^4 N \qquad \text{dove } 36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}$$

PROBLEMA N. 7



Un corpo di massa m = 1 kg viene lasciato andare, con velocità iniziale nulla nel punto A di una superficie avente la forma di un quadrante di cerchio, di raggio R = 1,3 m. Esso scivola lungo la curva e raggiunge il punto B con una velocità V_0 = 3,7 m/s. A partire dal punto B scivola su una superficie piana, arrestandosi infine nel punto C, che dista d = 2,8 m da B. Calcolare:

- il coefficiente di attrito della superficie piana
- il lavoro compiuto contro le forze d'attrito mentre il corpo scivola lungo il tratto AB

SOLUZIONE

- Lungo il tratto AB, essendoci attrito, vi è una dissipazione di energia, per cui l'energia posseduta nel punto B è minore di quella posseduta nel punto A. La quantità $\Delta E = E_A - E_B$ rappresenterà proprio il lavoro compiuto contro le forze di attrito lungo il tratto AB:

$$L = \Delta E = E_A - E_B = mgR - \frac{1}{2}mV^2 = 1\cdot 9{,}8\cdot 1{,}3 - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3{,}7^2 = 5{,}9J$$

- Per calcolare il coefficiente di attrito della superficie piana ci serve calcolare il lavoro resistente compiuto dalla forza d'attrito. A tal proposito utilizzeremo il:

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA $L = \Delta E_C = E_{C_C} - E_{C_B} = 0 - \frac{1}{2}mV_0^2 = -\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3{,}7^2 = -6{,}8J$

Noto L, dalla definizione di lavoro calcoliamo la forza d'attrito:

$$L = F_a \cdot D \Rightarrow F_a = \frac{L}{D} = \frac{6{,}8}{2{,}8} = 2{,}4N$$

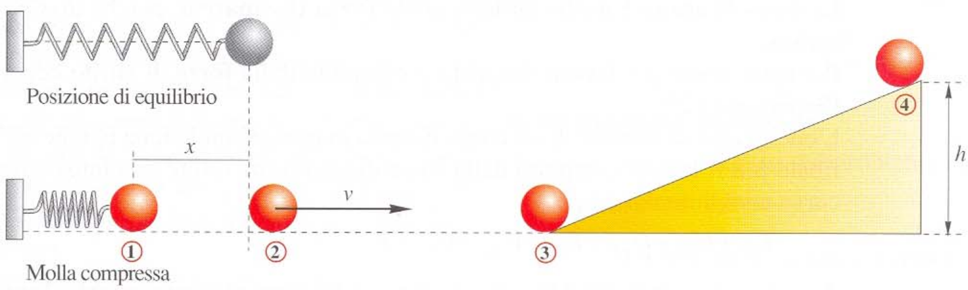
Infine, dalla definizione della forza d'attrito ricaviamo il coefficiente d'attrito:

$$F_a = \mu \cdot P \Rightarrow \mu = \frac{F_a}{P} = \frac{F_a}{m\cdot g} = \frac{2{,}4}{1\cdot 9{,}8} = 0{,}25$$

PROBLEMA N. 8

Una molla compressa di 10 cm, tornando alla sua posizione di equilibrio, lancia lungo un piano orizzontale senza attrito, una pallina di massa $m = 200$ g. Successivamente la pallina risale lungo un piano inclinato senza attrito. Sapendo che raggiunge l'altezza di 20 cm, quanto vale la costante elastica della molla?

■ MODELLO FISICO



Possiamo distinguere due diverse *trasformazioni di energia*:

– nella prima l'energia potenziale elastica della molla compressa (1) si trasforma in energia cinetica della pallina che si muove lungo il piano orizzontale (2) con velocità v;

– nella seconda l'energia cinetica della pallina si trasforma, risalendo il piano inclinato (3), in energia potenziale gravitazionale (4).

■ LEGGI ED EQUAZIONI

In base alla legge generale di conservazione dell'energia meccanica possiamo scrivere:

$$E_C + U_G + U_E = \text{costante}$$

e applicarla separatamente alle due trasformazioni di energia.

Poiché tuttavia il problema ci chiede solamente di determinare la costante elastica della molla (e quindi l'energia potenziale elastica iniziale) conoscendo l'altezza finale raggiunta dalla pallina (e quindi l'energia potenziale gravitazionale finale) possiamo scrivere semplicemente:

$$\frac{1}{2}kx^2 = mgh$$

poiché inizialmente l'energia è solamente elastica, mentre alla fine è solo gravitazionale.

■ RISOLUZIONE ALGEBRICA

Dalla precedente equazione si può ricavare la costante elastica k:

$$k = \frac{2mgh}{x^2}$$

■ RISOLUZIONE NUMERICA

Sostituendo i dati forniti dal problema si ottiene:

$$k = \frac{2mgh}{x^2} = \frac{2\cdot 0{,}2\text{ kg}\cdot 9{,}8\text{ m/s}^2\cdot 0{,}2\text{ m}}{(0{,}1\text{ m})^2} \cong 78\text{ N/m}$$

PROBLEMA N. 9

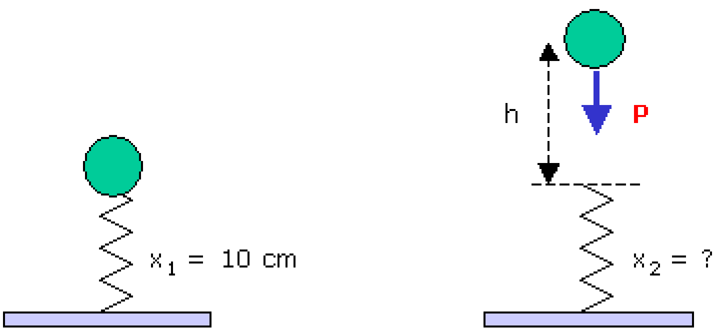
Una sfera pesante poggiata sopra una molla elastica produce una compressione statica di x_1 = 10 cm. Calcolare la massima compressione della molla x_2 se la sfera cade sopra la molla dall'altezza h = 120 cm, nell'ipotesi che la massa della molla sia trascurabile.

SOLUZIONE

Applichiamo il secondo principio della dinamica al corpo poggiato sulla molla per calcolare la sua massa:

$$F = mg \Rightarrow m = \frac{F}{g} = \frac{k \cdot x_1}{g}$$

dove la F non è altro che la forza elastica prodotta dalla molla (legge di Hooke).



Per calcolare la compressione della molla nel caso in cui la sfera cade sopra la molla dall'altezza h, applichiamo il:

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

$$mg \cdot (h + x_2) = \frac{1}{2} k x_2^2 \Rightarrow \frac{\cancel{k} x_1}{\cancel{g}} \cdot \cancel{g} \cdot (h + x_2) = \frac{1}{2} \cancel{k} x_2^2 \Rightarrow hx_1 + x_1 x_2 = \frac{1}{2} x_2^2 \Rightarrow x_2^2 - 2x_1 x_2 - 2hx_1 = 0$$

Risolviamo l'equazione di 2° grado nell'incognita x_2 così ottenuta:

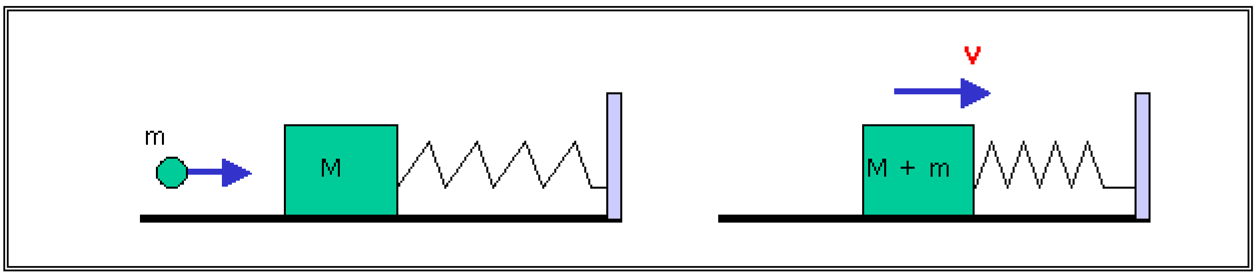
$$x_2^2 - 20x_2 - 2400 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 9600}}{2} = \frac{20 \pm 100}{2} = 60\text{cm}$$

dove abbiamo eliminato la soluzione x_2 = -40 cm perché fisicamente non accettabile.

PROBLEMA N. 10

Una pallottola di massa 10 g, sparata contro un blocco di massa 990 g poggiato sopra una superficie priva di attrito e fissato ad una molla di massa trascurabile e k = 100 N/m, viene incorporata dal blocco. Se in seguito all'urto la molla subisce una compressione massima di 10 cm, calcolare l'energia potenziale massima della molla e la velocità del blocco subito dopo l'urto.

SOLUZIONE



L'energia potenziale massima viene calcolata attraverso la sua definizione:

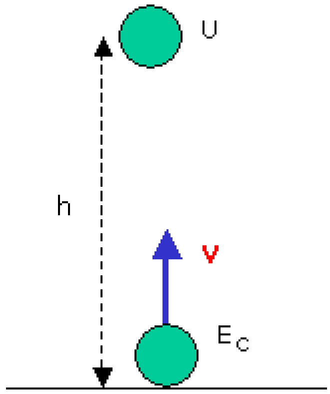
$$U_e = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}5J$$

Applichiamo il principio di conservazione dell'energia meccanica (tutta l'energia cinetica del blocco viene trasferita alla molla sotto forma di energia potenziale elastica) per calcolare la velocità del blocco:

$$E_C = U_e \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (M+m) \cdot V^2 = U_e \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2 \cdot U_e}{M+m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}5}{0{,}9+01}} = 1m/s$$

- **PROBLEMA N. 11**

Un corpo di massa 200 g, lanciato verticalmente verso l'alto con velocità di 25 m/s, raggiunge l'altezza massima di 30 m. Calcolare l'energia meccanica perduta per la resistenza dell'aria.



SOLUZIONE

La forza d'attrito è una forza dissipativa, per cui il corpo raggiungerà la massima altezza con un'energia potenziale U inferiore a quella cinetica E_C posseduta all'inizio del moto. Pertanto la quantità $\Delta E_M = E_C - U$ rappresenterà proprio l'energia meccanica dissipata per effetto dell'attrito dell'aria:

$$\Delta E_M = E_C - U = \frac{1}{2}mV^2 - mgh = \frac{1}{2} \cdot 0{,}2 \cdot 25^2 - 0{,}2 \cdot 9{,}8 \cdot 30 = 3{,}7J$$

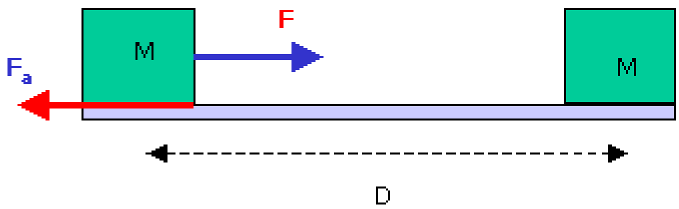
- **PROBLEMA N. 12**

Una cassa avente la massa di 20 kg viene trascinata per una distanza di 5,0 m sopra una superficie orizzontale con coefficiente d'attrito 0,40 da una forza costante di 200 N nella direzione del moto. Calcolare:

- il lavoro compiuto dalla forza applicata e dalla forza d'attrito
- la velocità finale della cassa nell'ipotesi che la velocità iniziale sia nulla

SOLUZIONE

- Il lavoro compiuto dalla forza F è un lavoro motore, quindi positivo; mentre il lavoro compiuto dalla forza F_a è un lavoro resistente, quindi negativo. Pertanto:



$$L = F \cdot D = 200 \cdot 5 = 1000J \qquad L_a = -F_a \cdot D = -\mu \cdot M \cdot g \cdot D = -0{,}40 \cdot 20 \cdot 9{,}8 \cdot 5 = -392J$$

- Il lavoro totale compiuto dalle forze che agiscono sul corpo è:

$$L_T = \sum L_i = L - L_a = 1000 - 392 = 608J$$

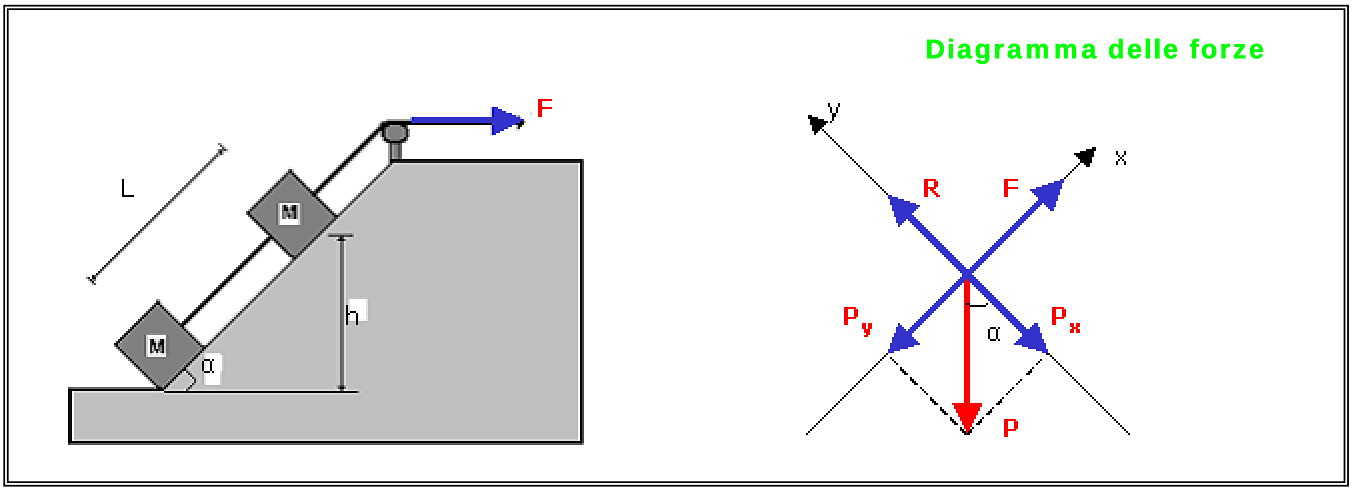
Utilizzando il teorema dell'energia cinetica siamo in grado di calcolare la velocità finale della cassa:

$$L_T = \Delta E_C = E_{C_F} - E_{C_I} = \frac{1}{2}MV^2 - 0 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2L_T}{M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 608}{20}} = 7{,}8 m/s$$

PROBLEMA N. 13

Un corpo di massa M = 15kg è trascinato in salita con velocità costante su una rampa priva di attrito per un tratto L = 5.7m fino ad una altezza h = 2.5m ,rispetto al punto di partenza, dove si arresta.

Calcolare il lavoro svolto dalla forza peso $\vec{P}$ e dalla forza trainante $\vec{F}$.



SOLUZIONE

Applichiamo la definizione di lavoro per calcolare quello compiuto dalla forza peso:

$$L_P = \vec{P} \bullet \vec{L} = P \cdot L \cdot \cos(90° + \alpha) = -mgL sen\alpha = -mg\cancel{L}\frac{h}{\cancel{L}} = -mgh = 15 \cdot 9{,}8 \cdot 2{,}5 = -368J$$

$$\text{dove: } sen\alpha = \frac{h}{L} \qquad \cos(90° + \alpha) = -sen\alpha$$

Il lavoro totale compiuto da tutte le forze che agiscono sul corpo è zero; infatti dal teorema dell'energia cinetica:

$$L_T = \Delta E_C = E_{Cf} - E_{Ci} = 0 \quad \text{in quanto } v_i = v_f = 0$$

quindi:

$$L_T = L_P + L_N + L_F = 0 \qquad \text{ma} \qquad L_N = \vec{N} \bullet \vec{L} = N \cdot L \cdot \cos 90° = 0$$

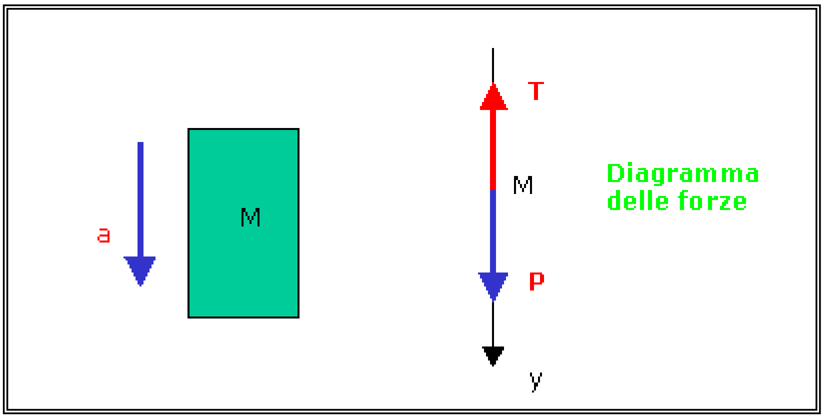
pertanto:

$$L_P + L_F = 0 \Rightarrow \quad L_F = -L_P = 368J$$

PROBLEMA N. 14

La cabina di un ascensore M = 500kg sta scendendo con velocità iniziale v_i = 4.0m/s quando il sistema di argani che ne controlla la discesa comincia a slittare, lasciandola cadere con accelerazione a = g/5.
Calcolare la velocità finale della cabina dopo una caduta di h = 12m.

SOLUZIONE



Applichiamo il teorema dell'energia cinetica:

$$L_{TOT} = \Delta E_C = E_{Cf} - E_{Ci} = \frac{1}{2}Mv_f^2 - \frac{1}{2}Mv_i^2 \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2L_{TOT} + Mv_i^2}{M}}$$

Poiché non è noto il lavoro svolto dalle forze che agiscono su M, procediamo nel seguente modo:

$$L_{TOT} = L_T + L_P = 1.2 \cdot 10^4\,J$$

dove:

$$L_P = \vec{P} \bullet \vec{L} = Mg \cdot L \cdot \cos 0° = 5.9 \cdot 10^4\,J \qquad L_T = \vec{T} \bullet \vec{L} = T \cdot L \cdot \cos 180° = -4.7 \cdot 10^4$$

La tensione T la calcoliamo applicando il 2° principio della dinamica:

$$P - T = Ma \Rightarrow T = Mg - Ma = M \cdot (g - g/5) = \frac{4}{5}g \cdot M = \frac{4}{5} \cdot 9{,}8 \cdot 500 = 3920N$$

In definitiva:

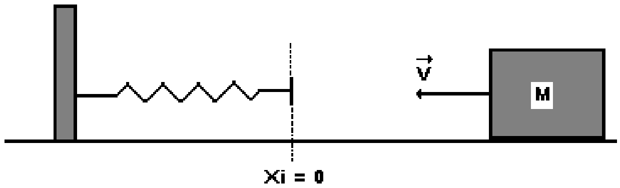
$$v_f = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^4 + 500 \cdot 4^2}{500}} = 8m/s$$

Considerazione:

$$\begin{cases} E_{Mi} = \frac{1}{2}Mv_i^2 + Mgh = 62.8 \cdot 10^3\,J \\ E_{Mf} = \frac{1}{2}Mv_f^2 = 15.6 \cdot 10^3\,J \end{cases} \Rightarrow \Delta E_M = E_{Mf} - E_{Mi} = 47.2 \cdot 10^3\,J \Rightarrow$$ cosa rappresenta?

PROBLEMA N. 15

Un blocco M = 5.7kg scivola, con una velocità v = 1.2 m/s, sul piano orizzontale privo di attrito di un tavolo, e comprime una molla di costante elastica k = 1500N/m. Per quale massima distanza è compressa la molla?



SOLUZIONE

Applichiamo il teorema dell'energia cinetica alla massa M:

$$L = \Delta E_C = \frac{1}{2}Mv_f^2 - \frac{1}{2}Mv_i^2 = -\frac{1}{2}Mv_i^2 \text{ in quanto } v_f = 0$$

Applichiamo il teorema dell'energia cinetica alla molla:

$$L = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 = -\frac{1}{2}kx_f^2$$

Pertanto:

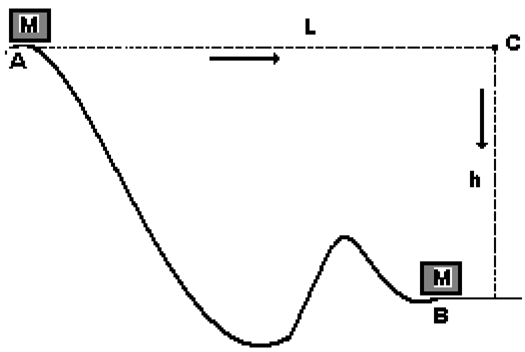
$$-\frac{1}{2}Mv_i^2 = -\frac{1}{2}kx_f^2 \Rightarrow x_f = \sqrt{\frac{Mv_i^2}{k}} = \sqrt{\frac{5{,}7 \cdot 1{,}2^2}{1500}} = 0{,}074\text{m} = 7.4\text{cm}$$

PROBLEMA N. 16

La figura mostra un corpo di massa M = 2kg scivola su una superficie priva di attrito dal punto A al punto B, mentre il dislivello verticale è h = 0.80m. Quanto lavoro compie il peso di M?

SOLUZIONE

Dall'analisi del problema appare subito evidente la difficoltà nel risolverlo in quanto non conosciamo l'esatta forma del percorso seguito. E anche se la conoscessimo, il calcolo sarebbe comunque complicato dal fatto che l'angolo, che entra nella formula del lavoro, varia continuamente lungo il percorso seguito dal corpo M.



Ma, grazie al fatto che la forza peso P è conservativa, possiamo scegliere un altro percorso tra A e B che faciliti i calcoli. A tal proposito scegliamo il percorso ACB, e su di esso calcoliamo il lavoro svolto da P.

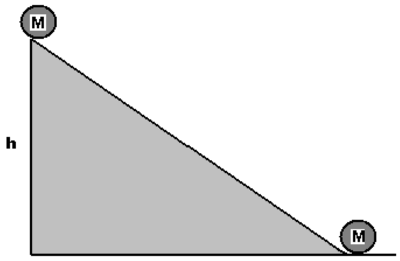
$$L_{AC} = \vec{P} \bullet \vec{L} = Mg \cdot L \cdot \cos 90° = 0$$

$$L_{CB} = \vec{P} \bullet \vec{h} = Mg \cdot h \cdot \cos 0° = 15.7\text{J}$$

$$L_{TOT} = L_{AC} + L_{CB} = 15.7\text{J}$$

PROBLEMA N. 17

Nella figura una pallina di massa m è lasciata andare, da fermo, dalla cima di uno scivolo alto h = 8.5m. A che velocità la pallina arriverà a terra, supponendo che l'attrito sia nullo?



SOLUZIONE

Principio di conservazione dell'energia:

$$E_{Mi} = E_{Mf} \Rightarrow E_{Ci} + E_{Pi} = E_{Cf} + E_{Pf} \Rightarrow 0 + Mgh = \frac{1}{2}Mv_f^2 + 0 \Rightarrow$$

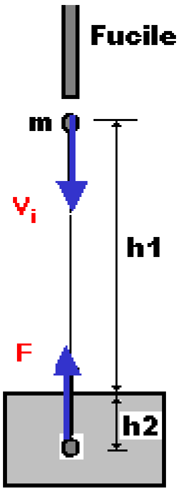
$$v_f = \sqrt{2gh} = 13m/s$$

Considerazioni:

- La velocità calcolata è la stessa che avrebbe raggiunto la pallina se fosse caduta lungo la verticale h
- La risoluzione di questo problema con le sole leggi della dinamica sarebbe stata più laboriosa.

PROBLEMA N. 18

Una sferetta d'acciaio m = 5.2g viene sparata verticalmente verso il basso da un'altezza h_1 = 18m con velocità iniziale v_i = 14m/s, per affondare nella sabbia a una profondità h_2 = 21cm.



Calcolare:

1. la variazione di energia meccanica della sferetta
2. la variazione di energia interna del sistema sferetta-Terra-sabbia
3. l'intensità della forza di resistenza media **F** esercitata dalla sabbia sulla sferetta.

SOLUZIONE

1. Variazione dell'energia meccanica $\Rightarrow \Delta E_M = \Delta E_C + \Delta E_P$

Calcoliamo la variazione di energia cinetica:

$$\Delta E_C = E_{Cf} - E_{Ci} = 0 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

dove l'energia cinetica finale è nulla in quanto all'istante dell'arresto alla profondità h_2 la velocità è zero.

Calcoliamo la variazione di energia potenziale:

$$\Delta E_P = E_{Pf} - E_{Pi} = 0 - mg(h_1 + h_2)$$

dove l'energia potenziale finale è nulla in quanto come riferimento di zero abbiamo scelto il punto di arresto della sferetta.

In definitiva:

$$\Delta E_M = -\frac{1}{2}mv_i^2 - mg(h_1 + h_2) = -1.44J$$

2. Principio di conservazione totale dell'energia :

$$\Delta E_M + \Delta E_{INT} = 0 \Rightarrow \Delta E_{INT} = -\Delta E_M = 1.44J$$

Considerazione: mentre la sferetta penetra nella sabbia, la forza **F** dissipa la sua energia meccanica, trasferendola all'energia interna (energia termica) della sferetta e della sabbia.

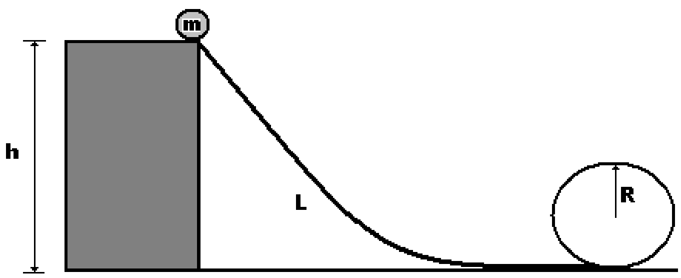
3. L'energia meccanica della sferetta si conserva fino a che essa raggiunge la sabbia. In seguito, mentre la sferetta si sposta di una distanza h_2 dentro la sabbia, la sua energia meccanica varia di ΔE_M. Pertanto il lavoro (negativo in quanto **F** è diretta in senso opposto allo spostamento della sferetta) svolto da **F** è proprio uguale a ΔE_M:

$$L_F = \vec{F} \bullet \vec{h}_2 = F \cdot h_2 \cdot \cos 180° = -F \cdot h_2 \qquad -F \cdot h_2 = \Delta E_M \Rightarrow F = \frac{\Delta E_M}{-h_2} = 6.84N$$

Considerazione:

Si potrebbe trovare **F** anche attraverso l'uso delle leggi della cinematica (ricavare la velocità della sferetta alla superficie della sabbia e il rallentamento nella sabbia) e della dinamica, ma con evidenti calcoli più laboriosi.

PROBLEMA N. 19



Una sfera ha una massa m = 50g e viene lasciata andare da ferma lungo una pista (h = 80cm; R = 20cm). La lunghezza del tratto di pista dal punto di partenza al punto più alto del cerchio è L = 2.5m .

a) Calcolare, in assenza di attrito, la minima altezza dal suolo da cui si deve lasciare andare la sfera, affinché riesca a compiere il giro del cerchio senza cadere;

b) Lasciando andare la sfera dal punto più alto della pista, calcolare il valore massimo ammissibile per la forza d'attrito, supposta costante lungo tutta la pista, affinché la sfera riesca a percorrere il cerchio senza cadere;

c) Se la forza d'attrito è F_a= 0.03N, calcolare la velocità con la quale la sfera sorpassa il punto più alto del cerchio.

SOLUZIONE

a) Applichiamo il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$E_{Mi} = E_{Mf} \Rightarrow E_{Ci} + E_{Pi} = E_{Cf} + E_{Pf} \Rightarrow 0 + mgh_{min} = \frac{1}{2}mv_f^2 + mg2R \Rightarrow h_{min} = \frac{v_f^2 + 4gR}{2g}$$

ma nel punto più alto del cerchio vale la relazione: $a_C = g \Rightarrow \frac{v^2}{R} = g \Rightarrow v^2 = gR$

per cui:

$$h_{MIN} = \frac{gR + 4gR}{2g} = \frac{5gR}{2g} = \frac{5}{2}R = \frac{5}{2}\cdot 20 = 50cm$$

b) In questo caso non vale il principio di conservazione dell'energia meccanica, in quanto è presente una forza non conservativa, la forza d'attrito, per cui :

$$1)\quad \Delta E_M = L_a \Rightarrow E_{Mf} - E_{Mi} = L_a \Rightarrow (\frac{1}{2}mv^2 + mg2R) - mgh = -F_a \cdot L$$

dove **F** e **L** sono due vettori paralleli e discordi istante per istante, per cui:

$$\vec{F}_a \bullet \vec{L} = F_a \cdot L \cdot \cos\alpha = -F_a \cdot L$$

pertanto dalla 1) si ricava che:

$$F_a = \frac{2mgh - 4mgr - mv^2}{2L}$$

e tenendo presente che nel punto più alto del cerchio vale la relazione:

$$a_C = g \Rightarrow \frac{v^2}{R} = g \Rightarrow v^2 = gR$$

allora:

$$F_a = \frac{2mgh - 4mgR - mgR}{2L} = \frac{2mgh - 5mgR}{2L} = mg\cdot\frac{2h - 5R}{2L} = 0{,}05\cdot 9{,}8\cdot\frac{2\cdot 0{,}8 - 5\cdot 0{,}2}{2\cdot 2{,}5} = 0.06N$$

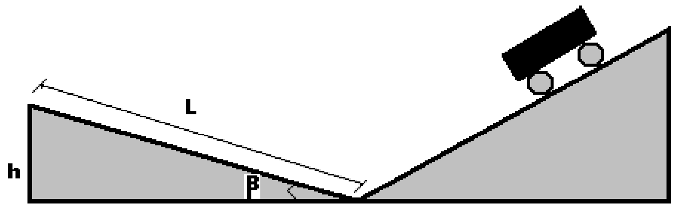
c) In corrispondenza di una forza d'attrito pari a 0,03 N la velocità nel punto più alto vale:

$$F_a = \frac{2mgh - 4mgR - mv^2}{2L} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{m}(mgh - mg2R - FL)} =$$

$$\sqrt{\frac{2}{0{,}05}\cdot(0{,}05\cdot 9{,}8\cdot 0{,}8 - 0{,}05\cdot 9{,}8\cdot 2\cdot 0{,}2 - 0{,}03\cdot 2{,}5)} = 2.2m/s$$

PROBLEMA N. 20

Un automobile fuori controllo sta scendendo con una velocità v = 130km/h. Alla fine della discesa c'è una rampa di emergenza in controtendenza, con inclinazione β = 15°. Quale deve essere la lunghezza minima L per essere certi che l'automobile arresti la sua corsa?



SOLUZIONE

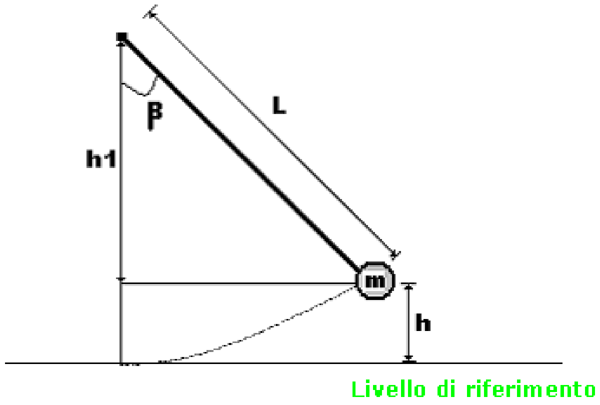
Applichiamo il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$E_{Mi} = E_{Mf} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 + 0 = 0 + mgh$$

ma: $h = L\cdot sen\beta$ per cui:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = mgLsen\beta \Rightarrow L = \frac{v_i^2}{2gsen\beta} = 257m$$

PROBLEMA N. 21



Un'asticella di massa trascurabile e lunghezza L = 2,00m è fissata ad un perno che le consente di descrivere un cerchio in un piano verticale. Una palla pesante di massa m è fissata all'estremità inferiore. L'asticella è spostata lateralmente di un angolo β = 30° e qui viene lasciata libera. A che velocità si muoverà la palla passando per il punto più basso?

SOLUZIONE

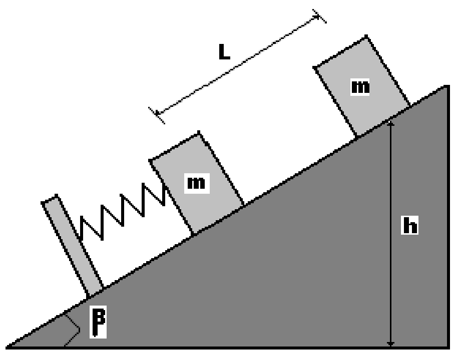
Applichiamo il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$E_{Mi} = E_{Mf} \Rightarrow mgh + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

ma: $h = L - h_1 = L - L \cdot \cos\beta = L \cdot (1 - \cos\beta)$ per cui:

$$mgL(1 - \cos\beta) = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gL(1-\cos\beta)} = 2{,}3m/s$$

PROBLEMA N. 22



Un blocco m = 2,00kg è appoggiato contro una molla sul piano inclinato, come indicato in figura, con pendenza β = 30°, privo di attrito. La molla, avente costante elastica k = 19,6 N/cm, è compressa di x = 20 cm e poi lasciata libera. Quanto lontano L lungo il piano inclinato viene spinto il blocco?

SOLUZIONE

Applichiamo il principio di conservazione dell'energia meccanica:

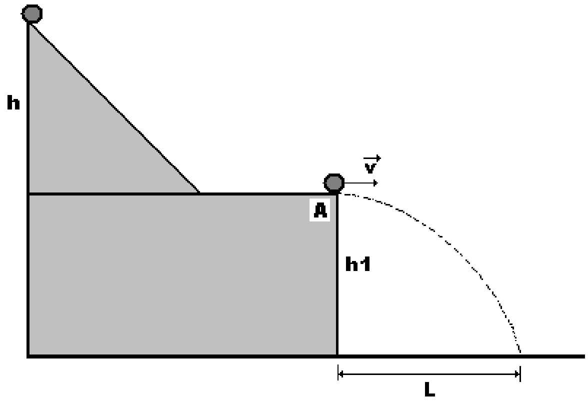
$$E_{Mi} = E_{Mf} \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 = mgh \qquad \text{dove:} \quad h = L \cdot sen\beta$$

per cui:

$$\frac{1}{2}kx^2 = mgLsen\beta \Rightarrow L = \frac{kx^2}{2mgsen\beta} = 4m$$

PROBLEMA N. 23

Una pallina, partendo da ferma, scende lungo un piano inclinato (h =70cm) senza attrito, posto su un tavolo ad una altezza h_1 = 80 cm rispetto al suolo. A quale distanza dal tavolo cadrà la pallina?



SOLUZIONE

Applichiamo il principio di conservazione dell'energia meccanica per determinare la velocità della pallina nel punto A, che è indispensabile conoscere per calcolare L:

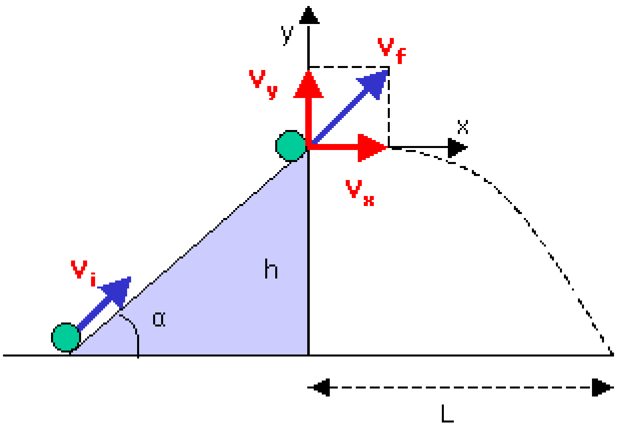
$$E_{Mi} = E_{Mf} \Rightarrow mgh + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + 0 \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = 3{,}7\,m/s$$

Il moto di caduta della pallina è quello del proiettile, ossia è caratterizzato da due moti indipendenti, uno in verticale di moto uniformemente accelerato ed uno in orizzontale di moto uniforme, pertanto:

$$\begin{cases} L = vt \\ h_1 = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L = 3{,}7 \cdot 0{,}4 = 1{,}5m \\ t = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}7}{9{,}8}} = 0{,}4s \end{cases}$$

PROBLEMA N. 24

Una pallina viene lanciata con velocità iniziale v_i = 5 m/s su una rampa senza attrito (α = 30°; h = 10 cm), ed uscendo descrive una traiettoria parabolica. A che distanza dalla rampa cadrà la pallina?



SOLUZIONE

Applichiamo il principio di conservazione dell'energia meccanica per determinare la velocità della pallina nel punto più alto della rampa:

$$E_{Mi} = E_{Mf} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{v_i^2 - 2gh} = 4{,}85\,m/s$$

La traiettoria parabolica della pallina è la composizione di due moti indipendenti, uno in verticale di moto uniformemente accelerato ed uno in orizzontale di moto uniforme, pertanto:

$$\begin{cases} L = v_x t = v_f \cos 30° \cdot t \\ -h = v_y t - \frac{1}{2}gt^2 = v_f sen30° \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L = 4{,}85 \cdot \cos 30° \cdot 0{,}54 = 2{,}3m \\ t = 0{,}54s \end{cases}$$

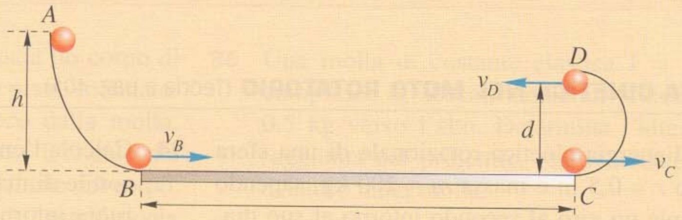
dove il tempo t è stato calcolato dalla seconda equazione del sistema che è un'equazione di 2° grado:

$$gt^2 - 2v_f sen30° - h = 0 \Rightarrow 9{,}8t^2 - 4{,}9t - 0{,}2 = 0 \Rightarrow t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4{,}9 \pm \sqrt{24 + 7{,}8}}{19{,}6} = 0{,}54s$$

dove abbiamo trascurato la soluzione t = -0,04 s perché fisicamente non accettabile.

PROBLEMA N. 25

Una pallina è posta nel punto *A* in cima a uno scivolo, a un'altezza *h* dal suolo. Strisciando senza attrito, cade sino al punto *B* e prosegue la sua corsa nel tratto orizzontale *BC* = *l*, la cui superficie presenta un coefficiente di attrito dinamico *k*. Giunta al punto *C*, percorre una semicirconferenza di diametro *d*, che non presenta attrito.
Qual è l'accelerazione centripeta cui è sottoposta la pallina un istante prima di lasciare la semicirconferenza nel punto *D*?



a) Consideriamo il tratto $A \rightarrow B$:
energia totale a disposizione in A (entrata) = energia spesa in B (uscita) $\Rightarrow$ equazione 1:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_B^2$$

b) Consideriamo il tratto $B \rightarrow C$:
energia totale a disposizione in B (entrata) = energia spesa in C (uscita) $\Rightarrow$ equazione 2:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + kmgl$$

c) Consideriamo il tratto $C \rightarrow D$:
energia totale a disposizione in C (entrata) = energia spesa in D (uscita) $\Rightarrow$ equazione 3:

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = mgd + \frac{1}{2}mv_D^2$$

In definitiva, si ha un sistema di tre equazioni da risolvere rispetto alle incognite del problema:

$$\begin{cases} mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 \\ \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + kmgl \\ \frac{1}{2}mv_C^2 = mgd + \frac{1}{2}mv_D^2 \end{cases}$$

Si può ricavare ora l'accelerazione centripeta richiesta ricordando che $a_{centr} = \frac{v_D^2}{r}$.

Ricavando v_D^2 dall'ultima equazione si ottiene:

$$v_D^2 = v_C^2 - 2gd$$

D'altro canto, dalla seconda equazione si ricava:

$$v_C^2 = v_B^2 - 2kgl$$

e dalla prima:

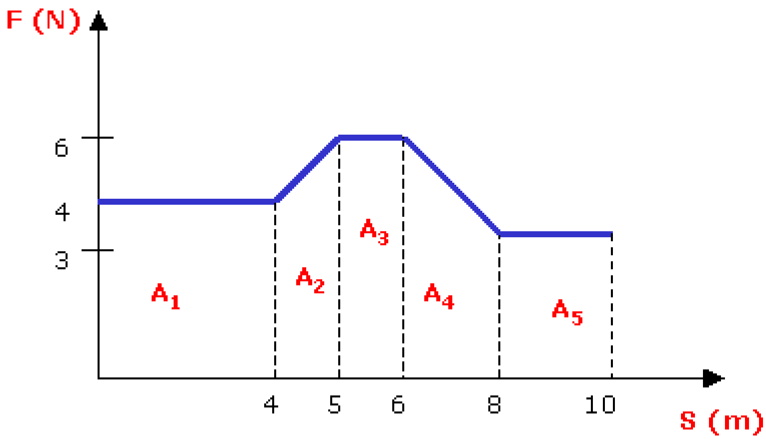
$$v_B^2 = 2gh$$

In definitiva si ottiene:

$$a_{centr} = \frac{2gh - 2kgl - 2gd}{\frac{d}{2}} = \frac{4g\,(h - kl - d)}{d}$$

PROBLEMA N. 26

Calcolare il lavoro compiuto dalla forza variabile **F**, la cui componente parallela allo spostamento è mostrata nel grafico in funzione dello spostamento stesso.



SOLUZIONE

Partendo dal concetto che il lavoro compiuto da una forza variabile è dato dall'area sottesa dalla funzione che descrive l'andamento di tale forza, allora:

$$L = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = (4 \cdot 4) + (\frac{6+4}{2} \cdot 1) + (1 \cdot 6) + (\frac{6+3}{2} \cdot 2) + (2 \cdot 3) = 42J$$

2. Principio di Conservazione della Quantità di Moto

ESERCIZIO N.1

Due palline si scontrano frontalmente in modo elastico.

- Studiare l'urto nelle seguenti situazioni: bersaglio mobile e bersaglio fisso (masse uguali, bersaglio massiccio, proiettile massiccio).

SOLUZIONE

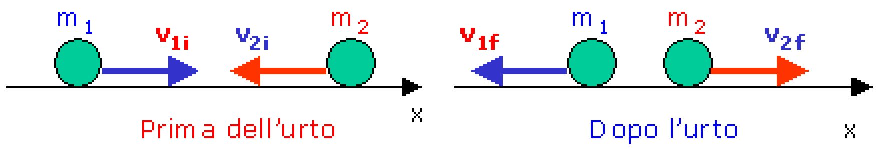
Applichiamo i principi di conservazione che caratterizzano un urto elastico, e cioè quello della quantità di moto e dell'energia cinetica:

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2f} \\ \frac{1}{2} m v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema rispetto alle velocità finali, nei vari casi:

URTI ELASTICI UNIDIMENSIONALI

Bersaglio mobile $v_{2i} \neq 0$



$$(1) \quad v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_{2i} \qquad (2) \quad v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{2i}$$

Bersaglio fisso $v_{2i} = 0$

- L'equazione (1) diventa:

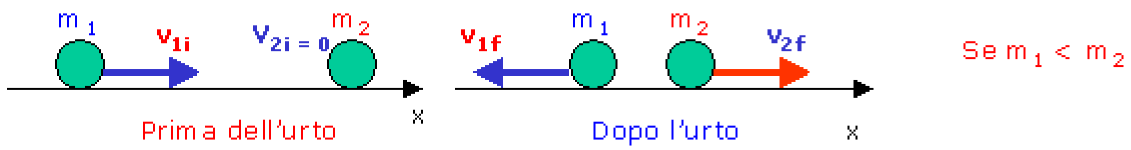
$$(3) \quad v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i}$$

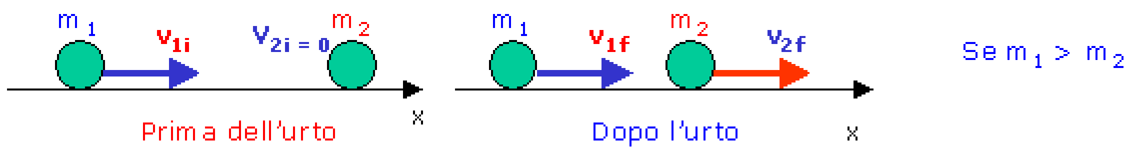
dove risulta che: v_{1f} è positiva, ossia il corpo di massa m_1 prosegue in avanti, se $m_1 > m_2$; v_{1f} è negativa, ossia il corpo di massa m_1 prosegue all'indietro, se $m_1 < m_2$;

- L'equazione (2) diventa:

$$(4) \quad v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i}$$

risulta che v_{2f} è sempre positivo, ossia il bersaglio di massa m_2 si muove sempre in avanti.



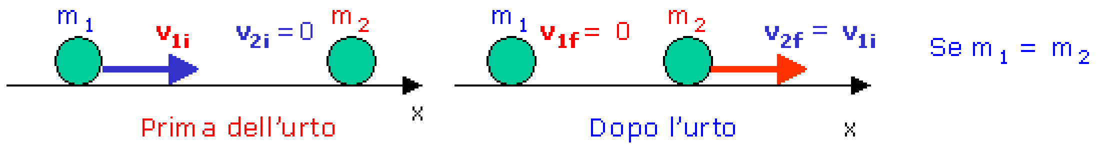


Bersaglio fisso $v_{2i} = 0$ e masse uguali $m_1 = m_2$

- Le equazioni (3) e (4) diventano:

$$v_{1f} = 0 \qquad v_{2f} = v_{1i}$$

dove risulta che il corpo m_1 si arresta sul punto dell'urto, mentre il corpo m_2 si allontana alla velocità iniziale del corpo m_1.

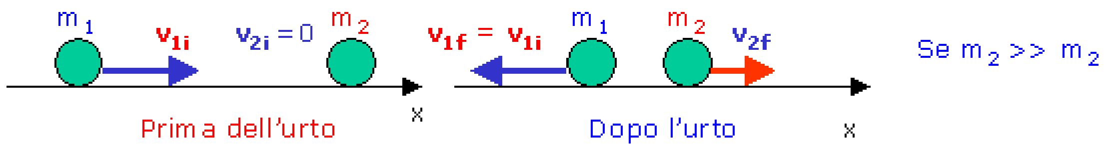


Bersaglio fisso $v_{2i} = 0$ e massiccio $m_2 >> m_1$

- Le equazioni (3) e (4) diventano:

$$v_{1f} \approx -v_{1i} \qquad v_{2f} \approx \left(\frac{2m_1}{m_2}\right) \cdot v_{1i}$$

dove risulta che il corpo m_1 rimbalza all'indietro a velocità invariata; il corpo m_2 si muove in avanti molto lentamente.

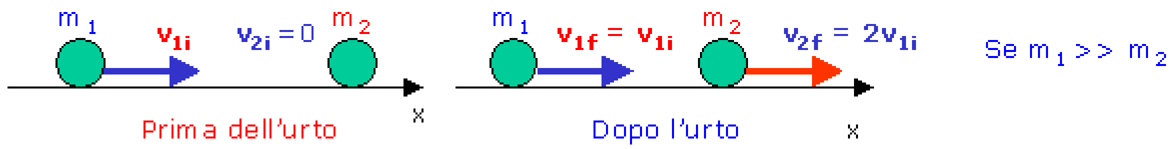


Bersaglio fisso $v_{2i} = 0$ e proiettile massiccio $m_1 >> m_2$

- Le equazioni (3) e (4) diventano:

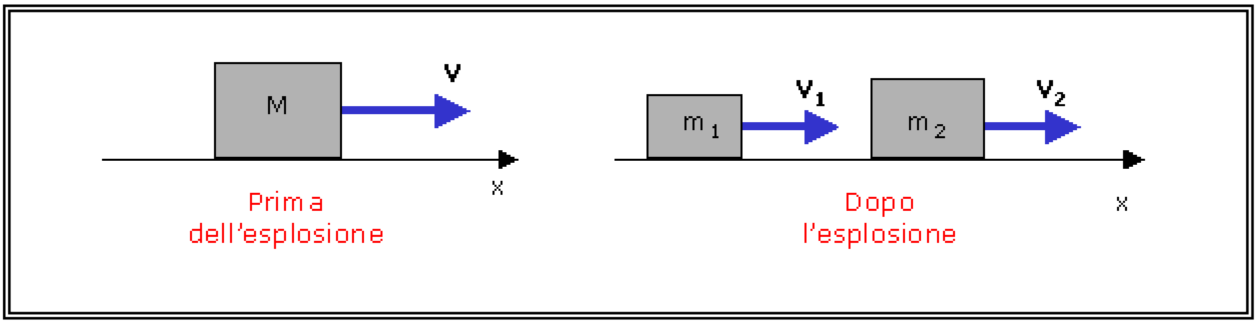
$$v_{1f} \approx v_{1i} \qquad v_{2f} \approx 2v_{1i}$$

dove risulta che il corpo m_1 prosegue praticamente indisturbato nel suo moto in avanti, mentre il corpo m_2 scatta in avanti a velocità doppia di quella del corpo m_1.



ESERCIZIO N.2

Una scatola di massa m = 6,0 kg scivola con velocità v = 4,0 m/s su un pavimento privo di attrito nel verso positivo dell'asse x. Improvvisamente esplode in due pezzi. Un pezzo, di massa m_1 = 2,0 kg, si muove nel verso positivo dell' asse x con velocità v_1 = 8,0 m/s. Qual è la velocità del secondo pezzo di massa m_2 = 4,0 kg?



SOLUZIONE

Il sistema non è isolato dato che tutti gli elementi in gioco sono sottoposti alla forza peso ed a quella vincolare del pavimento. Però tutte queste forze sono verticali e quindi non possono influenzare la componente orizzontale della quantità di moto del sistema, pertanto è possibile applicare il principio di conservazione della quantità di moto:

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \Rightarrow m\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \Rightarrow v_2 = \frac{mv - m_1v_1}{m_2} = 2{,}0 m/s$$

Abbiamo rappresentato l'espressione finale attraverso i moduli delle velocità in quanto il moto è unidimensionale.
Il valore della velocità è positivo per cui il moto del pezzo m_2 dopo l'urto avviene lungo l'asse positivo delle x.

ESERCIZIO N.3

Una granata lanciata verticalmente verso l'alto, quando raggiunge l'altezza massima, esplode in due frammenti di masse m_1 = 20 kg ed m_2 = 5 kg. Sapendo che la velocità del primo frammento è v_1 = 50 m/s, calcolare la velocità del secondo frammento.

SOLUZIONE

Considerando il sistema chiuso ed isolato, possiamo applicare il principio di conservazione della quantità di moto:

$$\mathbf{P}_{\text{prima esplosione}} = \mathbf{P}_{\text{dopo esplosione}} \quad (1)$$

La granata, quando raggiunge l'altezza massima, ha velocità nulla per cui la sua quantità di moto è zero, pertanto la (1) diventa:

$$0 = m_1v_1 + m_2v_2 \quad (2)$$

La velocità del secondo frammento la calcoliamo risolvendo la (2) rispetto all'incognita v_2:

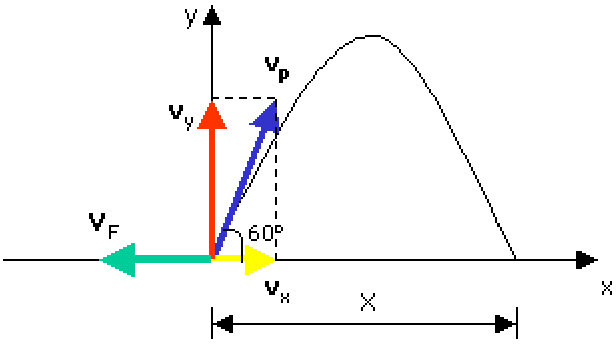
$$v_2 = -\frac{m_1}{m_2}\cdot v_1 = -\frac{20}{5}\cdot 50 = -200 m/s$$

Il segno meno indica che il secondo frammento, dopo l'esplosione, viaggerà in direzione opposta al primo frammento.

ESERCIZIO N.4

Un proiettile di massa m = 200 g viene sparato da un fucile a 60° rispetto all'orizzontale. Se la gittata è x = 306 m, calcolare la velocità V_F di rinculo del fucile, di massa M = kg, nell'ipotesi di trascurare la resistenza dell'aria.

SOLUZIONE



Nell'ipotesi di trascurare la resistenza dell'aria, il sistema fucile + proiettile è un sistema chiuso ed isolato, per cui possiamo applicare il principio di conservazione della quantità di moto:

$$\mathbf{P}_{\text{prima esplosione}} = \mathbf{P}_{\text{dopo esplosione}}$$

$$\Rightarrow 0 = m_p \cdot v_p + m_F \cdot V_F \Rightarrow V_F = -\frac{m_p}{m_F} \cdot v_p \quad (1)$$

dove il segno meno di V_F tiene conto del fatto che il fucile rincula dopo lo sparo.

Per calcolare v_p, applichiamo le leggi del moto del proiettile, tenendo presente che nel punto di caduta del proiettile, cioè alla distanza X, il valore di y è zero:

$$\begin{cases} X = v_x \cdot t \\ y = v_y \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = v_x \cdot t \\ 0 = v_y \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Tenendo presente che:

$$v_x = v_p \cdot \cos\alpha \qquad v_y = v_p \cdot \text{sen}\alpha$$

la risoluzione del sistema ci consente di calcolare v_p:

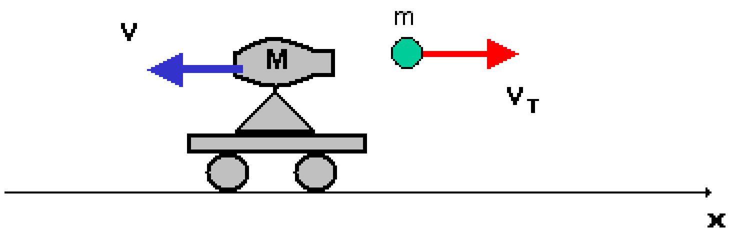
$$\begin{cases} X = \frac{2v_x \cdot v_y}{g} = \frac{2v_p \cos\alpha \cdot v_p \text{sen}\alpha}{g} = \frac{2v_p^2 \cos\alpha \cdot \text{sen}\alpha}{g} \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{X \cdot g}{2\cos\alpha \cdot \text{sen}\alpha}} = \sqrt{\frac{306 \cdot 9{,}8}{2 \cdot \cos 30° \cdot \text{sen}30°}} = 58{,}8\,\text{m/s} \\ t = \frac{2v_y}{g} = \frac{2v_p \cdot \text{sen}\alpha}{g} \end{cases}$$

In definitiva:

$$V_F = -\frac{0{,}2}{4} \cdot 58{,}8 = 2{,}94\,\text{m/s}$$

ESERCIZIO N.5

In figura è mostrato un cannone di massa M = 1300 kg che spara una palla, di massa m = 72 kg, in direzione orizzontale ad una velocità **v** relativa al cannone (v = 55 m/s), che rincula a velocità **V** rispetto alla Terra.



- Calcolare la velocità **V** e **v_T**

SOLUZIONE

Scegliamo come sistema il cannone più la palla, in modo tale che le forze che intervengono nello sparo siano interne al sistema, mentre le forze esterne non hanno componenti orizzontali. In questo modo vale il principio di conservazione della quantità di moto.
Se scegliamo la Terra come sistema di riferimento, ed indichiamo con v_T la velocità della palla relativamente alla Terra, la velocità v della palla rispetto al cannone è data da:

$$v = v_T - V \Rightarrow v_T = v + V \quad (1)$$

Allora:

$$P_{Ti} = P_{Tf} \Rightarrow 0 = M \cdot V + m \cdot v_T \Rightarrow 0 = M \cdot V + m \cdot (v + V)$$

e risolvendo rispetto a V si ottiene:

$$V = -\frac{m}{M+m} \cdot v = -2{,}9 m/s$$

Il segno meno ci conferma che il cannone rincula verso sinistra come indicato in figura.

Dall'equazione (1) si ricava:

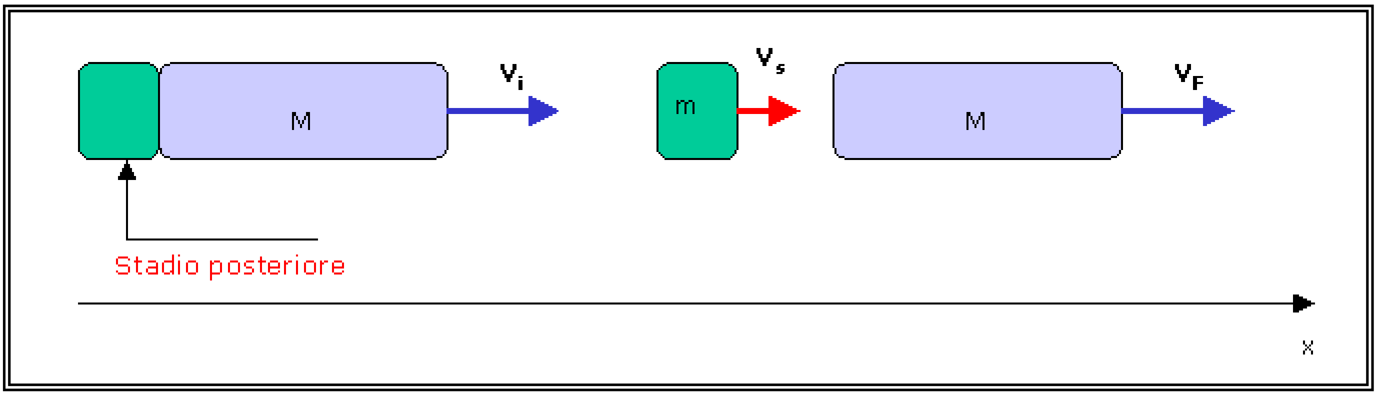
$$v_T = 52 m/s$$

A causa del rinculo, la palla si muove, rispetto alla Terra, con una velocità leggermente inferiore rispetto a V.

ESERCIZIO N.6

Un'astronave di massa M sta viaggiando nelle profondità dello spazio alla velocità v_i = 2100 km/h rispetto al Sole. Con una piccola esplosione espelle uno stadio posteriore di massa m = 0,20M alla velocità relativa v_R = 500 km/h.

Calcolare la velocità dell'astronave dopo l'espulsione dello stadio.



SOLUZIONE

Il sistema astronave + stadio posteriore è chiuso ed isolato, per cui possiamo applicare il principio di conservazione della quantità di moto:

$$P_{Ti} = P_{Tf} \Rightarrow M \cdot v_i = 0{,}20M \cdot v_S + 0{,}80M \cdot v_f \quad (1)$$

ma:

$$v_R = v_f - v_S \Rightarrow v_S = v_f - v_R$$

per cui sostituendo nella (1) si ottiene:

$$M \cdot v_i = 0{,}20M \cdot (v_f - v_R) + 0{,}80M \cdot v_f$$

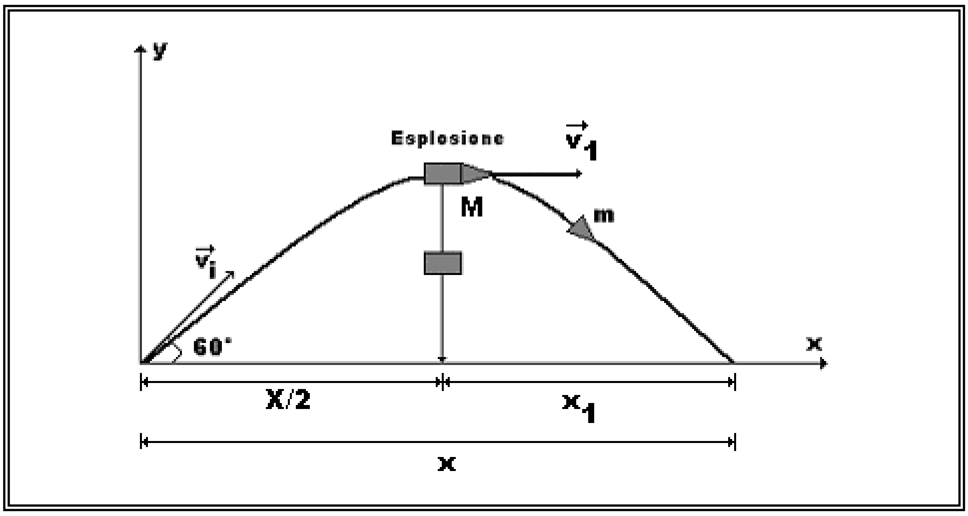
Risolvendo rispetto a v_f si ha:

$$v_f = v_i + 0{,}20 \cdot v_R = 2200 km/h$$

ESERCIZIO N.7

Un cannone spara una granata con una velocità iniziale di 20 m/s e con una inclinazione di 60° rispetto al piano orizzontale. Al vertice della traiettoria la granata esplode, rompendosi in due frammenti di uguale massa. Uno dei due, che immediatamente dopo l'esplosione ha velocità nulla, cade verticalmente.

A che distanza dal cannone atterrerà l'altro frammento nell'ipotesi che sia trascurabile la resistenza dell'aria?



SOLUZIONE

Applichiamo le leggi del moto del proiettile al pezzo di granata di massa m:

$$\begin{cases} x_1 = v_1 \cdot t \\ y = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad (1)$$

In queste equazioni non è nota la velocità v_1, cioè la velocità del pezzo di granata dopo l'esplosione. A tal proposito applichiamo il principio di conservazione della quantità di moto:

$$P_i = P_f \Rightarrow Mv\cos 60° = mv_1 \Rightarrow v_1 = 2v\cos 60° = 20 m/s$$

Mentre per calcolare y, che rappresenta l'altezza h del punto più alto della traiettoria, applichiamo le leggi del moto del proiettile alla granata di massa M:

$$\begin{cases} x = v_i \cos\alpha \cdot t \\ y = v_i \mathrm{sen}\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x}{v_i \cos\alpha} \\ y = v_i \mathrm{sen}\alpha \dfrac{x}{v_i \cos\alpha} - \dfrac{1}{2} g \dfrac{x^2}{(v_i \cos\alpha)^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$y = -\frac{g}{2(v\cos\alpha)^2}x^2 + tg\alpha \cdot x = -0{,}05x^2 + 1{,}73x \quad (2)$$

La (2) rappresenta l'equazione di una parabola di vertice :

$$V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = (17{,}3;15)$$

le cui coordinate rappresentano, rispettivamente, la metà della gittata ed il punto più alto della traiettoria:

$$x_V = 17{,}3m$$
$$h = 15m$$

In alternativa, l'altezza h può essere determinata attraverso il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2}M(v_i sen60°)^2 = Mgh \Rightarrow h = \frac{(v_i sen60°)^2}{2g} = \frac{(20 \cdot sen60°)^2}{2 \cdot 9{,}8} = 15{,}3m$$

Ritornando alla (1) allora si ottiene:

$$\begin{cases} x_1 = 35m \\ t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15}{9{,}8}} = 1{,}75 sec \end{cases}$$

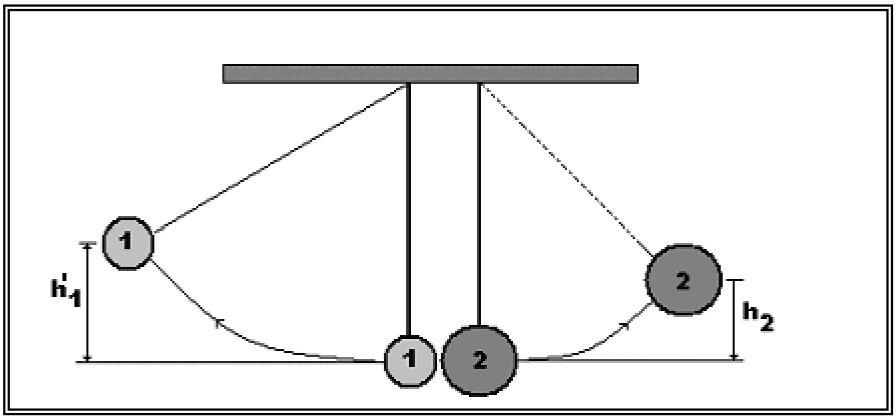
In definitiva la distanza del punto d'impatto del pezzo di granata m dal punto in cui è stato lanciato il proiettile M, è data da:

$$x = x_V + x_1 = 17{,}3 + 35 = 52{,}3m$$

ESERCIZIO N.8

Due sfere metalliche, sospese come in figura, sono inizialmente a contatto. La sfera 1, con massa m_1 = 30 g, viene lasciata libera dopo essere stata tirata verso sinistra fino all'altezza h_1 = 8,0 cm. Ritornata, cadendo, alla posizione iniziale, subisce un urto elastico contro la sfera 2, di massa m_2 = 75 g.

- Calcolare le altezze dove arriveranno le sfere dopo l'urto



SOLUZIONE

Poiché siamo in presenza di urto elastico, possiamo applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica per calcolare la velocità della sfera 1 all'atto dell'urto:

$$E_{Mi} = E_{Mf} \Rightarrow m_1 g h_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 \Rightarrow v_{1i}^2 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}080} = 1{,}25 m/s$$

La sfera 1 percorre una traiettoria bidimensionale, ma all'atto dell'urto con la sfera 2 il suo moto è unidimensionale, per cui la sua velocità vettoriale è rappresentabile proprio con v_{1i}.

Per calcolare la velocità della sfera 1 e della sfera 2 dopo l'urto possiamo utilizzare il principio di conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica:

$$\begin{cases} m_1 v_{1_i} + 0 = m_1 v_{1_f} + m_2 v_{2_f} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1_i}^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 v_{1_f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2_f}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{1_f} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_{1_i} = -0{,}54 m/s \\ v_{2_f} = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{1_i} = 0{,}72 m/s \end{cases}$$

Il segno meno della velocità della sfera 1 dopo l'urto indica che si sta muovendo verso sinistra, in direzione opposta alla sfera 2.

Applicando di nuovo il principio di conservazione dell'energia meccanica alla sfera 1 dopo l'urto, nonché alla sfera 2, siamo in grado di calcolare le altezze h_1' e h_2:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 = m_1 g h_1' \Rightarrow h_1' = \frac{v_{1f}^2}{2g} = \frac{(-0{,}54)^2}{2 \cdot 9{,}8} = 0{,}015 m$$

$$\frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 = m_2 g h_2 \Rightarrow h_2 = \frac{v_{2f}^2}{2g} = \frac{(0{,}72)^2}{2 \cdot 9{,}8} = 0{,}026 m$$

ESERCIZIO N.9

In un reattore nucleare i neutroni veloci, prodotti in una reazione di fissione nucleare, devono essere rallentati per poter mantenere in maniera efficace la reazione a catena. Per tale ragione vengono lasciati liberi di urtarsi con i nuclei degli atomi di un moderatore.

Calcolare la frazione dell'energia cinetica iniziale perduta da un neutrone di massa m_1 in un urto frontale elastico con un nucleo di massa m_2 inizialmente a riposo.

SOLUZIONE

Le energie cinetiche iniziale e finale del neutrone sono:

$$E_{Ci} = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 \qquad E_{Cf} = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2$$

La frazione percentuale che cerchiamo è:

$$\text{fraz} = \frac{E_{Ci} - E_{Cf}}{E_{Ci}} \cdot 100 = \frac{v_{1i}^2 - v_{1f}^2}{v_{1i}^2} \cdot 100 = \left(1 - \frac{v_{1f}^2}{v_{1i}^2} \right) \cdot 100$$

Per calcolare il rapporto $\dfrac{v_{1f}^2}{v_{1i}^2}$, applichiamo il principio di conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica, visto che siamo in presenza di urto elastico:

$$\begin{cases} m_1 v_{1_i} + 0 = m_1 v_{1_f} + m_2 v_{2_f} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1_i}^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 v_{1_f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2_f}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{1_f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_{1_i} \Rightarrow \frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \\ v_{2_f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{1_i} \end{cases}$$

per cui:

$$\text{fraz} = \left[1 - \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} \right] \cdot 100 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot 100$$

Valutiamo le frazioni di energia cinetica perse per il piombo, il carbonio e l'idrogeno. I rapporti delle rispettive masse nucleari rispetto alla massa del neutrone sono:

Piombo $\Rightarrow$ $m_2/m_1 = 206$ Carbonio $\Rightarrow$ $m_2/m_1 = 12$ Idrogeno $\Rightarrow$ $m_2/m_1 = 1$

Pertanto:

$$\text{fraz(piombo)} = \frac{4m_1 \cdot 206 m_1}{(m_1 + 206 m_1)^2} \cdot 100 = \frac{m_1^2 (4 \cdot 206)}{m_1^2 (1 + 206)^2} \cdot 100 = \frac{4 \cdot 206}{(1 + 206)^2} \cdot 100 = 1{,}9\%$$

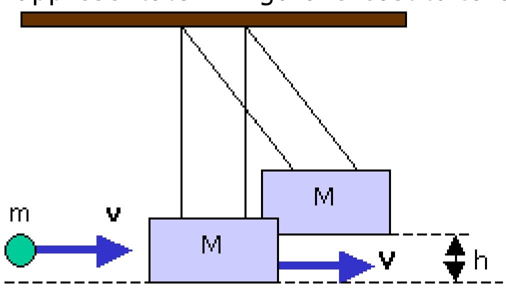
$$\text{fraz(carbonio)} = \frac{4 \cdot 12}{(1 + 12)^2} \cdot 100 = 28\%$$

$$\text{fraz(idrogeno)} = \frac{4 \cdot 1}{(1 + 1)^2} \cdot 100 \cong 100\%$$

Questi risultati chiariscono perché l'acqua, che contiene una grande quantità di atomi di idrogeno, sia un moderatore molto più efficace del piombo o del carbonio.

ESERCIZIO N.10

Il pendolo balistico è un dispositivo che era usato per misurare la velocità dei proiettili, prima dell'introduzione di dispositivi elettronici. Quello rappresentato in figura è costituito da un blocco di legno sospeso di massa M = 5,4kg. Un proiettile di massa m = 9,5g è sparato contro il blocco, nel quale prontamente si arresta. Il sistema blocco + proiettile oscilla verso destra portandosi ad una altezza h = 6,3 cm. Calcolare la velocità del proiettile prima dell'urto.



SOLUZIONE

Applichiamo il principio di conservazione della quantità di moto e dell'energia meccanica al sistema proiettile + blocco:

$$\begin{cases} mv = (m + M) \cdot V \\ \frac{1}{2}(m + M) \cdot V^2 = (m + M) \cdot gh \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{m + M}{m} \cdot \sqrt{2gh} = \frac{9{,}5 \cdot 10^{-3} + 5{,}4}{9{,}5 \cdot 10^{-3}} \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}063} = 630 m/s \\ V = \frac{m}{m + M} \cdot v = \frac{9{,}5 \cdot 10^{-3}}{9{,}5 \cdot 10^{-3} + 5{,}4} \cdot 630 = 1{,}1 m/s \end{cases}$$

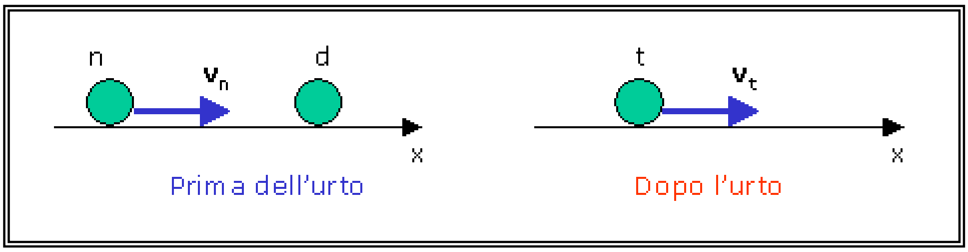
Considerazione:

Essendo l'urto anelastico non vale il principio di conservazione dell'energia cinetica. Ma dopo l'urto al sistema proiettile + blocco è possibile applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica non essendoci in gioco nessuna forza atta a dissiparla.

ESERCIZIO N.11

Un nucleo di deuterio (m_d = $3,347 \cdot 10^{-27}$ kg), inizialmente fermo, cattura un neutrone (m_n =$1,675 \cdot 10^{-27}$ kg) che sta muovendosi alla velocità v_n = 10^6 m/s, originando un nucleo di trizio. Calcolare la velocità del nucleo di trizio.

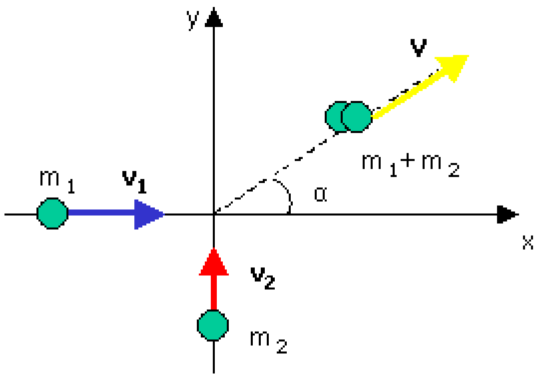
SOLUZIONE



Si tratta di un urto completamente anelastico, per cui possiamo applicare solo il principio di conservazione della quantità di moto, che basta per rispondere al quesito posto dal problema:

$$\vec{P}_{Ti} = \vec{P}_{Tf} \Rightarrow m_n \cdot \vec{v}_n + 0 = (m_n + m_d) \cdot v_t \Rightarrow v_t = \frac{m_n}{m_n + m_d} \cdot v_n = \frac{1,675 \cdot 10^{-27}}{1,675 \cdot 10^{-27} + 3,347 \cdot 10^{-27}} \cdot 10^6 = 3,33 \cdot 10^5 \, m/s$$

ESERCIZIO N.12



Due corpi si scontrano in un urto completamente anelastico come in figura. Le masse in gioco sono m_1 = 83 kg con velocità v_1 = 6,2km/h e m_2 = 55kg con velocità v_2 = 7,8km/h.

Calcolare la velocità del blocco $m_1 + m_2$ dopo l'urto.

SOLUZIONE

Applichiamo il principio di conservazione della quantità di moto nella sua forma vettoriale, visto che ci troviamo di fronte ad un problema bidimensionale:

$$\vec{P}_{Ti} = \vec{P}_{Tf} \Rightarrow m_1 \cdot \vec{v}_{1i} + m_2 \cdot \vec{v}_{2i} = m_1 \cdot \vec{v}_{1f} + m_2 \cdot \vec{v}_{2f}$$

Le sue componenti lungo gli assi sono:

$$P_{xi} = P_{xf} \Rightarrow m_1 v_1 = (m_1 + m_2) \cdot V \cdot \cos\beta$$
$$P_{yi} = P_{yf} \Rightarrow m_2 v_2 = (m_1 + m_2) \cdot V \cdot \text{sen}\beta$$

Da queste equazioni si ricavano le incognite V e β:

$$\text{tg}\alpha = \frac{m_2 \cdot v_2}{m_1 \cdot v_1} = \frac{55 \cdot 7,8}{83 \cdot 6,2} = 0,834 \Rightarrow \alpha = \text{arctg}(0,834) = 39,8°$$

$$V = \frac{m_2 \cdot v_2}{(m_1 + m_2) \cdot \text{sen}\alpha} = \frac{55 \cdot 7,8}{(83 + 55) \cdot \text{sen}39,8°} = 4,9 km/h$$

ESERCIZIO N.13

Una reazione di grande importanza per la produzione di energia elettrica da fusione nucleare è la cosiddetta reazione d-d, una forma della quale è:

$$(1)\quad d + d \rightarrow t + p$$

Le particelle rappresentate nella reazione sono tutte isotopi dell'idrogeno, le cui proprietà sono:

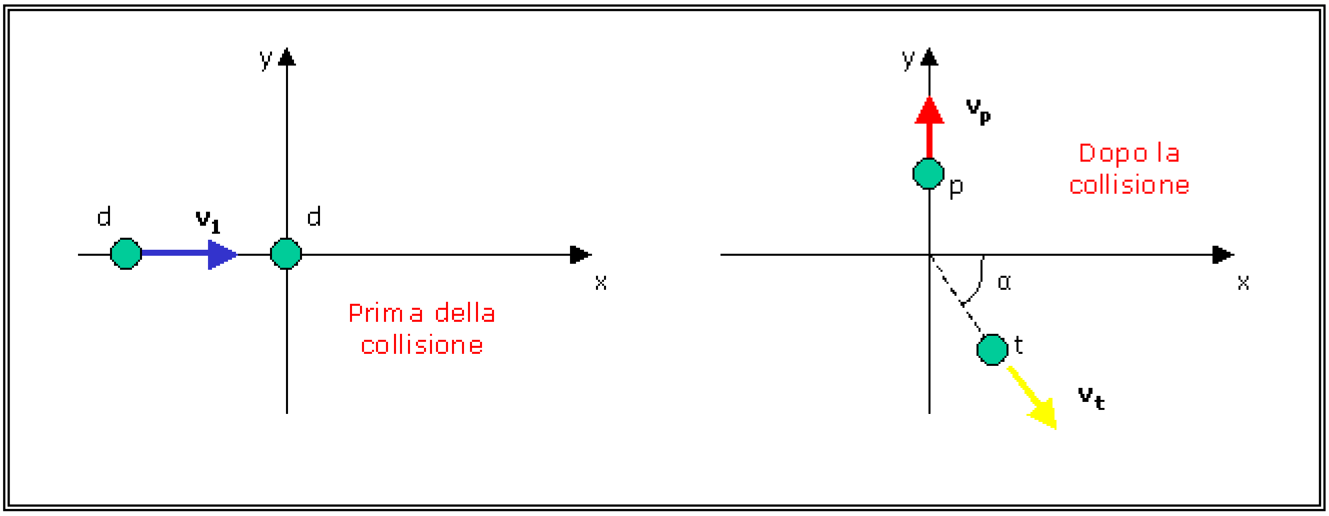
Simbolo	Nome	Massa
p ^{1}H	Protone	m_p = 1,00783uma
d ^{2}H	Deuterone	m_d = 2,01410uma
t ^{3}H	Tritone	m_t = 3,01605uma
1uma = $1{,}66\cdot10^{-27}$kg		

Il deuterone d di energia cinetica E_{Cd}=1,50MeV entra in collisione con un deuterone stazionario, innescando la reazione (1). Come si osserva dalla figura, viene sprigionato un protone p, che si allontana in direzione normale alla direzione del deuterone incidente, con energia cinetica E_{Cp}=3,30MeV.

Calcolare:

1. l'energia cinetica E_{Ct} del tritone e quindi la sua velocità;
2. l'angolo di diffusione del tritone.

SOLUZIONE



Nota di teoria:

La massa e l'energia sono legate dalla seguente famosa equazione:

$$(1)\quad E = mc^2$$

dove E rappresenta l'energia equivalente (chiamata energia di massa) alla massa m e c la velocità della luce (c^2 = 932MeV/u).
In una reazione o in un decadimento di particelle nucleari, si ha la conservazione della quantità di moto e dell'energia totale. In questi casi la (1) diventa:

$$(2)\quad Q = -\Delta m \cdot c^2$$

dove Q (chiamata energia di reazione) è l'energia liberata (Q > 0 processo esotermico, cioè parte dell'energia di massa delle particelle del sistema è convertita in energia cinetica) o assorbita (Q < 0 processo endotermico, cioè una parte dell'energia cinetica delle particelle del

sistema è convertita in energia di massa) e Δm è la diminuzione o l'aumento corrispondente della massa per effetto della reazione.

Applicando la (2) si ottiene:

$$Q = -\Delta m \cdot c^2 = (2m_d - m_p - m_t) \cdot c^2 = (2 \cdot 2{,}01410u - 1{,}00783u - 3{,}01605u) \cdot 931{,}5 = 4{,}02 MeV$$

e poiché Q > 0 il processo è esotermico.

L'energia Q liberata per diminuzione della massa si manifesta sotto forma di aumento dell'energia cinetica totale delle particelle, quindi:

$$Q = \Delta E_C = E_{Cp} + E_{Ct} - E_{Cd} \Rightarrow E_{Ct} = Q + E_{Cd} - E_{Cp} = 4{,}02 + 1{,}50 - 3{,}39 = 2{,}13$$

allora la velocità della particella t sarà:

$$E_{Ct} = \frac{1}{2} m_t \cdot v_t^2 \Rightarrow v_t = \sqrt{\frac{2E_{Ct}}{m_t}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}13 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{3{,}01605 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}}} = 1{,}2 \cdot 10^7 \, m/s$$

Per calcolare l'angolo di diffusione della particella t, applichiamo il principio di conservazione della quantità di moto nella sua forma vettoriale, per cui le sue componenti lungo gli assi sono:

$$\text{Componente x} \Rightarrow m_d v_d = m_t v_t \cos\alpha$$
$$\text{Componente y} \Rightarrow 0 = m_p v_p + m_t v_t \operatorname{sen}\alpha$$

Da queste equazioni si ricava:

$$\operatorname{sen}\alpha = -\frac{m_p v_p}{m_t v_t} = \frac{1{,}00783u \cdot 3{,}3 \cdot 10^7}{3{,}01605u \cdot 1{,}2 \cdot 10^7} = -0{,}92 \Rightarrow \alpha = -66{,}7°$$

dove:

$$E_{Cp} = \frac{1}{2} m_p v_p^2 \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{2E_{Cp}}{m_p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}39 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{1{,}00783 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}}} = 3{,}3 \cdot 10^7 \, m/s$$

ESERCIZIO N.14

Un nucleo radioattivo di uranio 235 (^{235}U) decade spontaneamente in torio 231 (^{231}Th) emettendo una particella alfa α (che si indica anche con ^4H in quanto è il nucleo di un atomo di elio):

$$^{235}U \rightarrow \alpha + {}^{231}Th$$

La particella α (m_α = 4,00u) ha un'energia cinetica $E_{C\alpha}$ = 4,60MeV.

Calcolare l'energia cinetica del nucleo rinculante di torio 231, la cui massa è m_{Th}=231u.

SOLUZIONE

Il nucleo di uranio è inizialmente a riposo rispetto al sistema di riferimento del laboratorio. Dopo il decadimento la particella α si allontana in una certa direzione , mentre il nucleo di torio rincula nella direzione opposta. Applicando il principio di conservazione della quantità di moto si ottiene:

$$0 = m_{Th}v_{Th} + m_\alpha v_\alpha \Rightarrow m_{Th}v_{Th} = -m_\alpha v_\alpha$$

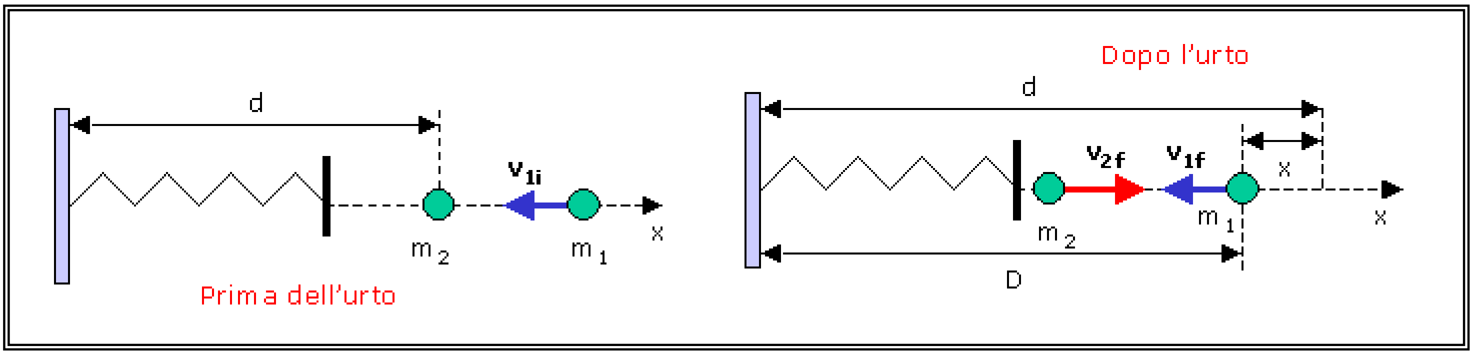
ed elevando al quadrato entrambi i membri, tenendo presente la definizione di energia cinetica (E_C=1/2mv^2), si ricava che:

$$m_{Th}^2 v_{Th}^2 = m_\alpha^2 v_\alpha^2 \Rightarrow m_{Th}^2 \frac{2E_{CTh}}{m_{Th}} = m_\alpha^2 \frac{2E_{C\alpha}}{m_\alpha} \Rightarrow E_{CTh} = \frac{m_\alpha}{m_{Th}} \cdot E_{C\alpha} = \frac{4{,}00u}{231u} \cdot 4{,}60 = 79{,}7keV$$

ESERCIZIO N.15

Due palline sono vincolate a muoversi su un filo senza attrito, come in figura. Una pallina, di massa m_2 = 350g, è ferma a distanza d = 53cm dall'estremità del filo. L'altra, di massa m_1=590g, le si avvicina con velocità v_{1i}=-75cm/s e collide elasticamente con quella ferma. Quest'ultima rimbalza contro una molla e rincontra la prima pallina una seconda volta.

Calcolare la distanza dall'estremità in cui avviene il secondo urto.



SOLUZIONE

Siamo in presenza di un urto elastico unidimensionale, per cui vale sia il principio di conservazione della quantità di moto che dell'energia cinetica:

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i} = \frac{590-350}{590+350} \cdot (-75) = -19{,}1cm/s \\ v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i} = \frac{2 \cdot 590}{590+350} \cdot (-75) = -94{,}1cm/s \end{cases}$$

Dal segno delle due velocità dopo l'urto si ricava che sia la pallina 1, che, ovviamente, la pallina 2, sono dirette verso sinistra.

Poiché siamo in presenza di un moto privo di attrito, e così come pure la molla non interferisce sulla velocità della pallina 2 in quanto dopo la compressione restituisce tutta l'energia cinetica della pallina che si era trasformata in energia potenziale elastica, le leggi cinematiche in gioco sono quelle del moto uniforme.

Pertanto nell'intervallo di tempo Δt la pallina 1 percorre la distanza X:

$$X = v_{1f} \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{X}{v_{1f}}$$

e, nello stesso intervallo di tempo, la palline 2 percorre la distanza (2d-X):

$$(2d - X) = v_{2f} \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{2d - X}{v_{2f}}$$

Uguagliando le due quantità Δt, si ricava l'incognita X:

$$\frac{X}{v_{1f}} = \frac{2d - X}{v_{2f}} \Rightarrow X = \frac{v_{1f}}{v_{1f} + v_{2f}} \cdot 2d = \frac{(-19{,}1)}{(-19{,}1) + (-94{,}1)} \cdot (2 \cdot 53) = 18cm$$

Quindi, in definitiva, la distanza D dall'estremità sarà:

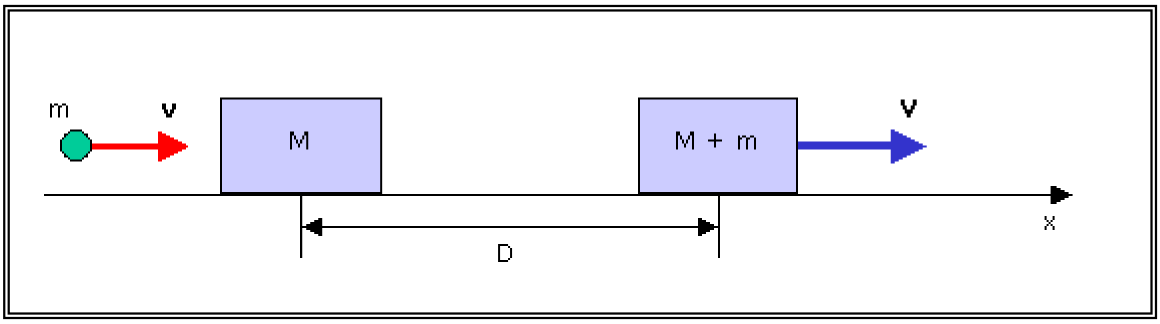
$$D = d - X = 53 - 18 = 35cm$$

ESERCIZIO N.16

Un proiettile di massa m=4,5g è sparato orizzontalmente contro un blocco di legno di massa M=2,4kg su una superficie orizzontale. Il coefficiente di attrito dinamico fra il blocco di legno ed il piano di scorrimento è μ_d=0,20. Il proiettile rimane conficcato nel blocco, che si sposta di D=1,8m.

Calcolare :

1. la velocità del blocco + proiettile e la velocità del proiettile prima dell'urto;
2. il tempo impiegato dal blocco + proiettile per percorrere il tratto D.



SOLUZIONE

Siamo in presenza di un urto anelastico, per cui possiamo applicare solo il principio di conservazione della quantità di moto:

$$m \cdot v = (m + M) \cdot V \Rightarrow v = \frac{m + M}{m} \cdot V \quad (1)$$

Per calcolare la velocità V del blocco + proiettile, applichiamo il secondo principio della dinamica e la legge del moto uniformemente accelerato, in quanto sul blocco + proiettile agisce una forza costante, la forza di attrito:

$$F_a = (m + M) \cdot a \Rightarrow \mu_d N = (m + M) \cdot a \Rightarrow \mu_d (m + M) g = (m + M) \cdot a \Rightarrow a = \mu_d g$$

$$\begin{cases} D = \frac{1}{2} a t^2 \\ V = a \cdot t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \sqrt{\frac{2D}{\mu_d g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}8}{0{,}2 \cdot 9{,}8}} = 1{,}36s \\ V = \mu_d g \sqrt{\frac{2D}{\mu_d g}} = \sqrt{2X\mu_d g} = \sqrt{2 \cdot 1{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 9{,}8} = 2{,}66 m/s \end{cases}$$

Pertanto, dalla (1) ricaviamo la velocità del proiettile prima dell'urto:

$$v = \frac{4{,}5 \cdot 10^{-3} + 2{,}4}{4{,}5 \cdot 10^{-3}} \cdot 2{,}66 = 1421 m/s$$

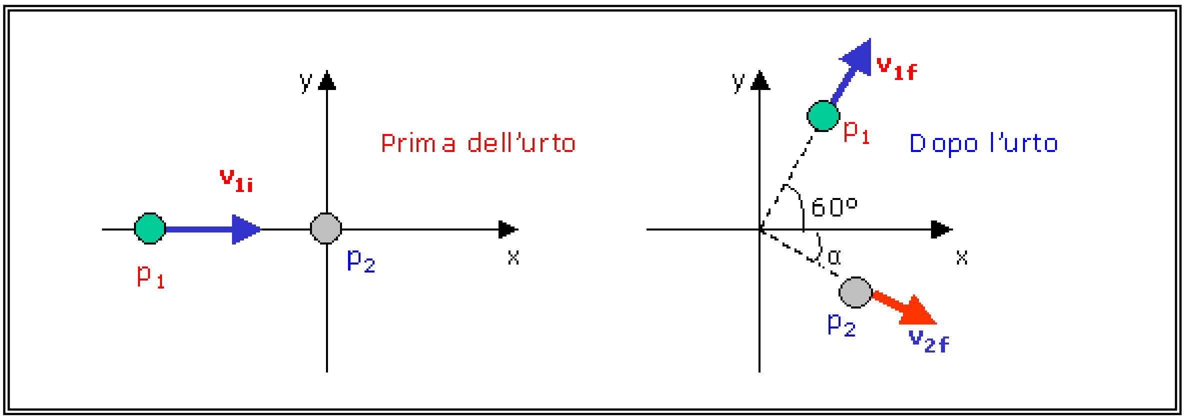
ESERCIZIO N.17

Un protone p_1, di massa atomica m_p=1u , alla velocità v_{1i} = 500m/s, urta elasticamente un altro protone p_2 a riposo. Il primo protone proiettile viene deviato a 60° dalla sua direzione primitiva.

Calcolare:

1. la velocità dei due protoni dopo l'urto;
2. la direzione della velocità del protone bersaglio.

SOLUZIONE



Siamo in presenza di un urto elastico, per cui vale sia il principio di conservazione della quantità di moto, nella sua forma vettoriale visto che ci troviamo di fronte ad un problema bidimensionale, che dell'energia cinetica. Pertanto, risolvendo il seguente sistema di tre equazioni in tre incognite, calcoleremo le velocità dei protoni dopo l'urto e l direzione della velocità del protone bersaglio:

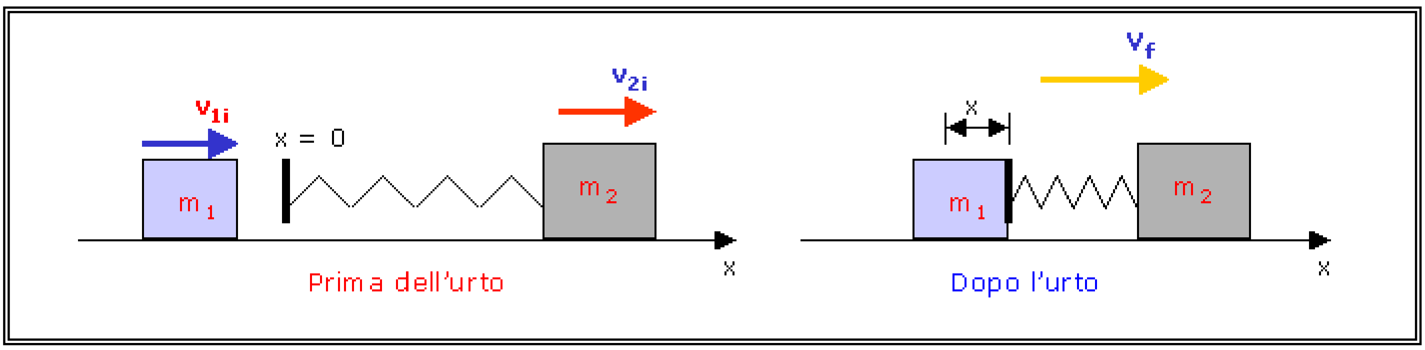
$$\begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos 60° + m_2 v_{2f} \cos\alpha \\ 0 = m_1 v_{1f} \operatorname{sen} 60° - m_2 v_{2f} \operatorname{sen}\alpha \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{1f} = 250 m/s \\ v_{2f} = 430 m/s \\ \alpha = 30° \end{cases}$$

ESERCIZIO N.18

Un blocco di massa m_1=2,0kg scivola su un piano privo di attrito alla velocità v_{1i}=10m/s. Davanti al primo, sulla stessa linea e nella stessa direzione, si muove alla velocità v_{2i}=3,0m/s un secondo blocco di massa m_2=5,0kg. Una molla priva di massa, con costante elastica k=1120 N/m, è attaccata sul retro del blocco 2.

- Calcolare la massima compressione della molla quando i due blocchi si urtano.

SOLUZIONE



Quando la compressione della molla raggiunge il massimo valore, i due blocchi si muovono come un solo blocco, per cui siamo in presenza di un urto completamente anelastico, al qualepossiamo applicare il principio di conservazione della quantità di moto per calcolare la velocità finale del blocco 1 + blocco 2:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) \cdot V_f \Rightarrow V_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 10 + 5 \cdot 3}{2 + 5} = 5 m/s$$

Essendo l'urto completamente anelastico, non vale il principio di conservazione dell'energia cinetica totale, e poiché siamo in presenza di un moto privo di attrito, la diminuzione dell'energia cinetica totale dobbiamo ritrovarla sotto forma di energia potenziale elastica della molla. Da queste considerazioni possiamo ricavare la massima compressione della molla:

$$\Delta E_{CT} = E_{CTi} - E_{CTf} = (\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2) - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot V_f^2 = 35 J$$

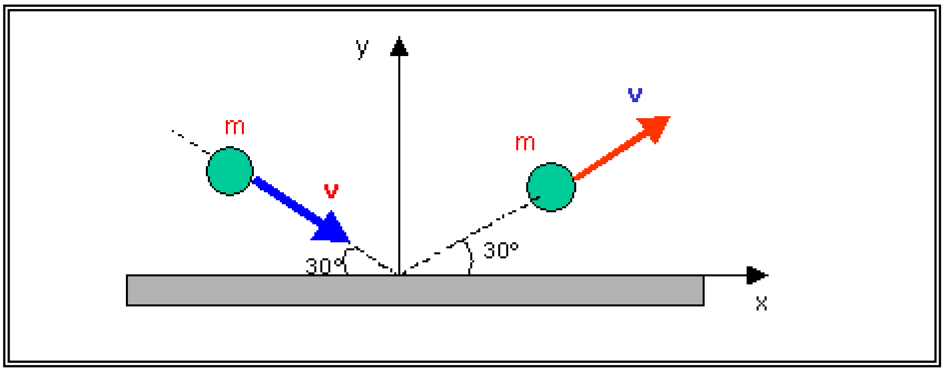
$$E_p = \Delta E_{CT} \Rightarrow \frac{1}{2} k x^2 = \Delta E_{CT} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta E_{CT}}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 35}{1120}} = 25 cm$$

ESERCIZIO N.19

Una palla da 300g colpisce una parete alla velocità v = 6,0m/s con un angolo α = 30° e rimbalza con uguale velocità e angolo. Il contatto dura 10ms.

Calcolare la forza media esercitata dalla palla sulla parete.

SOLUZIONE



Applicando il teorema dell'impulso otteniamo:

$$\vec{I} = \Delta \vec{p}$$

dove:

$$\Delta p_x = m v_x - m v_x = 0$$
$$\Delta p_y = m v_y + m v_y = 2 m v_y = 2 m v sen\alpha$$

quindi:

$$I = 2 m v sen\alpha = 2 \cdot 0,3 \cdot 6 \cdot sen30° = 1,8 N \cdot sec$$

Invece, dalla definizione di impulso calcoliamo la forza media impressa dalla pallina sulla parete:

$$I = \overline{F} \cdot \Delta t \Rightarrow \overline{F} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{1,8}{10 \cdot 10^{-3}} = 180 N$$

3. Principio di Conservazione del Momento Angolare

TEORIA

- Per un corpo puntiforme m che ruota su una circonferenza di raggio R con velocità costante v, il momento angolare, in modulo, è esprimibile come:

$$L = mvR = m\omega R^2$$

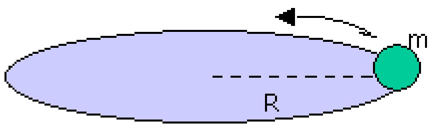
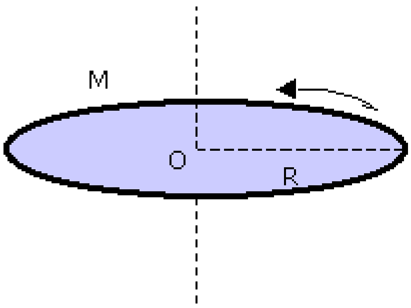
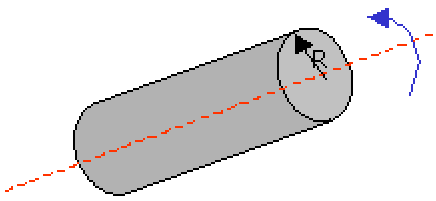
- Per i corpi rigidi, ossia per corpi composti da diverse particelle di massa m_i che possono ruotare con diverse velocità alla distanza r_i intorno ad un asse di rotazione, il momento angolare, in modulo, assume la forma:

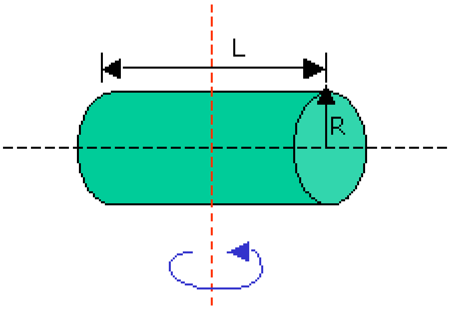
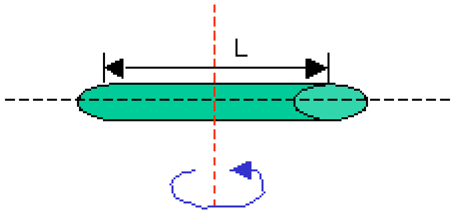
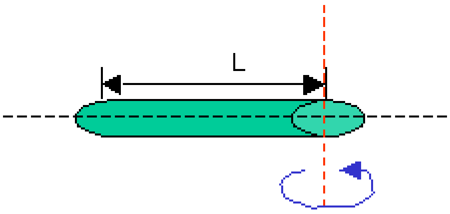
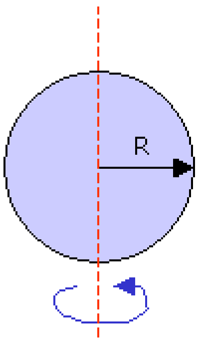
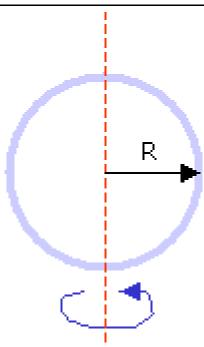
$$L = I\omega$$

dove:

$$I = \sum_i m_i \cdot r_i^2$$ Momento d'inerzia

Il calcolo del momento d'inerzia è in generale molto complesso, per cui riportiamo nella seguente tabella le formule per calcolare il momento d'inerzia di alcuni corpi rigidi:

TIPO DI CORPO	RAPPRESENTAZIONE	MOMENTO D'INERZIA
Punto materiale m che ruota su una circonferenza di raggio R		$I = mR^2$
Anello di raggio R e massa M che ruota rispetto al proprio asse		$I = MR^2$
Cilindro pieno di massa M e raggio R che ruota rispetto al proprio asse		$I = \frac{MR^2}{2}$

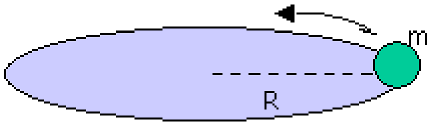
Cilindro pieno di massa M, raggio R e lunghezza L che ruota rispetto ad un asse passante per il centro, perpendicolare all'asse del cilindro		$I = \frac{MR^2}{4} + \frac{ML^2}{12}$
Sbarra sottile di massa M e lunghezza L che ruota rispetto ad un asse perpendicolare alla sbarra e passante per il suo centro		$I = \frac{ML^2}{12}$
Sbarra sottile di massa M e lunghezza L che ruota rispetto ad un asse perpendicolare alla sbarra passante per un suo estremo		$I = \frac{ML^2}{3}$
Sfera piena di raggio R e massa M che ruota rispetto ad un suo diametro		$I = \frac{2}{5} MR^2$
Guscio sferico di massa M e raggio R che ruota rispetto ad un suo diametro		$I = \frac{2}{3} MR^2$

PROBLEMA N.1

Una persona di massa M = 80 kg salta sull'unico seggiolino di una giostra in rotazione a velocità angolare costante. Sapendo che il raggio della giostra è R = 5 m, che la massa del seggiolino è m = 100 kg e che compie 1 giro in 4 s, calcolare il periodo di rotazione della giostra dopo che la persona è salita, nell'ipotesi di trascurare la velocità iniziale della persona e gli attriti.

SOLUZIONE

Il sistema è approssimabile a quello di un punto materiale m che ruota su una circonferenza di raggio R. Poiché per ipotesi non agiscono forze esterne, vale il principio di conservazione della quantità di moto che ci consente di calcolare la velocità angolare finale:



$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \Rightarrow I_i\omega_i = I_f\omega_f \Rightarrow mR^2\omega_i = (m+M)R^2\omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{m}{m+M}\cdot\omega_i = \frac{100}{180}\cdot 1{,}57 = 0{,}87\,\mathrm{rad/s}$$

dove:

$$\omega_i = \frac{2\pi}{T_i} = \frac{2\pi}{4} = 1{,}57\,\mathrm{rad/s}$$

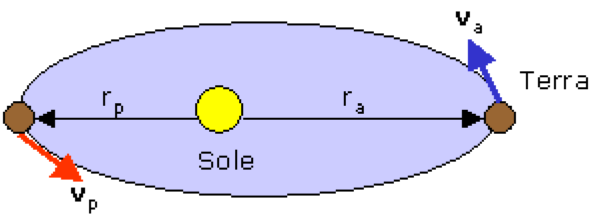
Pertanto, il periodo della giostra dopo che la persona è salita è dato da:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_f} = \frac{2\pi}{0{,}87} = 7{,}2\mathrm{s}$$

PROBLEMA N.2

La velocità della Terra all'afelio è v_a = 2,93·10^4 m/s e la sua distanza è r_a = 1,52·10^{11} m. Calcolare la velocità della Terra al perielio dove la distanza è r_p = 1,47·10^{11} m.

SOLUZIONE



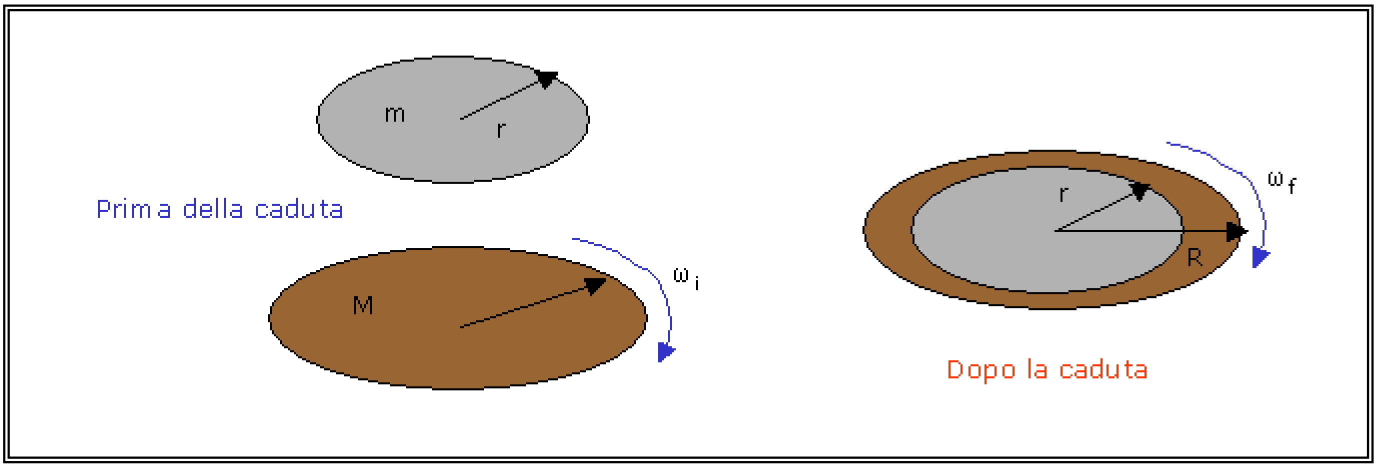
Considerando puntiforme la Terra nel suo moto intorno al Sole, e trascurando l'effetto di tutte le forze esterne al sistema Sole + Terra, possiamo applicare il principio di conservazione del momento angolare per poter calcolare la velocità della Terra al perielio:

$$\vec{L}_a = \vec{L}_p \Rightarrow m_T v_a r_a = m_T v_p r_p \Rightarrow v_p = \frac{r_a}{r_p}\cdot v_a = \frac{1{,}52\cdot 10^{11}}{1{,}47\cdot 10^{11}}\cdot 2{,}93\cdot 10^4 = 3{,}03\cdot 10^4\,\mathrm{m/s}$$

PROBLEMA N.3

Un disco di massa m = 300 kg e raggio r = 3 m cade su una piattaforma circolare rotante di massa M = 500 kg e raggio R = 5m in maniera tale che i due centri coincidono. Calcolare la frequenza di rotazione finale della piattaforma dopo la caduta del corpo, sapendo che inizialmente era f_i = 0,1 Hz.

SOLUZIONE



Poiché si conserva il momento angolare totale, si ha:

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \Rightarrow I_i \omega_i = I_f \omega_f \quad (1)$$

Il momento d'inerzia per una piattaforma rotante, cioè per un cilindro di raggio R che ruota intorno al proprio asse, come si evince dalla tabella, è dato da:

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

per cui la (1) diventa:

$$\frac{MR^2}{2} \cdot \omega_i = \frac{mr^2}{2} \cdot \omega_f + \frac{MR^2}{2} \cdot \omega_f \Rightarrow \frac{MR^2}{2} \cdot \omega_i = \frac{mr^2 + MR^2}{2} \cdot \omega_f$$

dove il momento d'inerzia finale I_f è la somma dei momenti d'inerzia dei due dischi.

Risolvendo rispetto ad ω_f, calcoliamo la velocità angolare del sistema disco 1 + disco 2:

$$\omega_f = \frac{\frac{MR^2}{2}}{\frac{mr^2 + MR^2}{2}} \cdot \omega_i = \frac{MR^2}{mr^2 + MR^2} \cdot \omega_i = \frac{500 \cdot 5^2}{300 \cdot 3^2 + 500 \cdot 5^2} \cdot 0{,}63 = 0{,}52 \text{rad/s}$$

dove:

$$\omega_i = 2\pi f_i = 2\pi \cdot 0{,}1 = 0{,}63 \text{rad/s}$$

Pertanto, la frequenza di rotazione della piattaforma formata dal sistema disco 1 + disco 2 è data da:

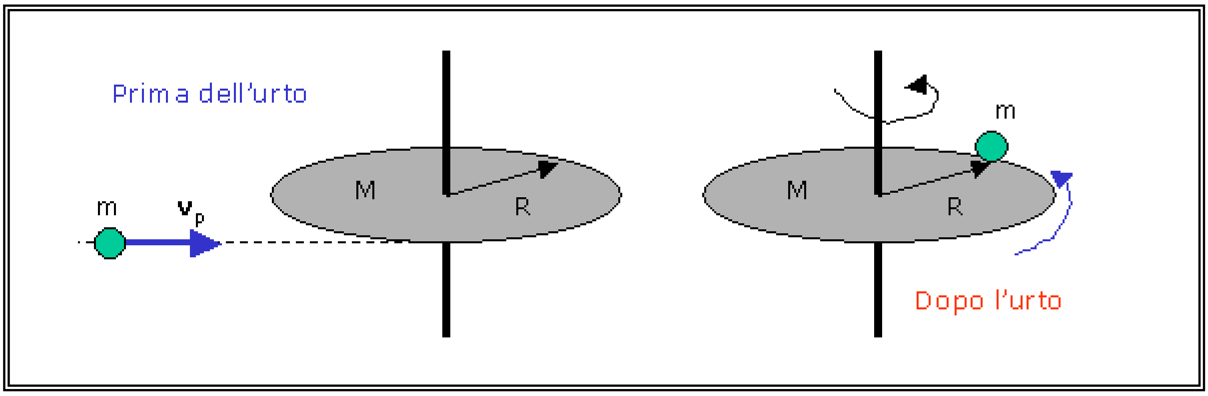
$$f = \frac{\omega_f}{2\pi} = \frac{0{,}52}{2\pi} = 0{,}08 \text{Hz}$$

PROBLEMA N.4

Un disco di raggio R = 1 m e massa M = 10 kg è in quiete appeso ad un filo verticale passante per il suo centro, intorno al quale può ruotare. Un proiettile di massa m = 100 g e velocità v_p = 50 m/s urta tangenzialmente il disco e vi rimane conficcato dopo l'urto.

- Calcolare la velocità tangenziale ed angolare del sistema dopo l'urto.

SOLUZIONE



Nell'ipotesi che il momento torcente delle forze agenti sul sistema sia nullo, possiamo applicare il principio di conservazione del momento angolare:

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \Rightarrow I_i\omega_i = I_f\omega_f \Rightarrow m\cancel{R}^2\omega_p = m\cancel{R}^2\omega_D + \frac{M\cancel{R}^2}{2}\omega_D \Rightarrow m\omega_p = \frac{2m+M}{2}\cdot\omega_D \quad (1)$$

dove:

- il momento d'inerzia finale I_f è la somma dei momenti d'inerzia del proiettile e del disco;
- il momento d'inerzia per un disco rotante, cioè per un cilindro di raggio R che ruota intorno al proprio asse, come si evince dalla tabella, è dato da:

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

Risolvendo la (1) rispetto ad ω_D, calcoliamo la velocità angolare del sistema disco + proiettile:

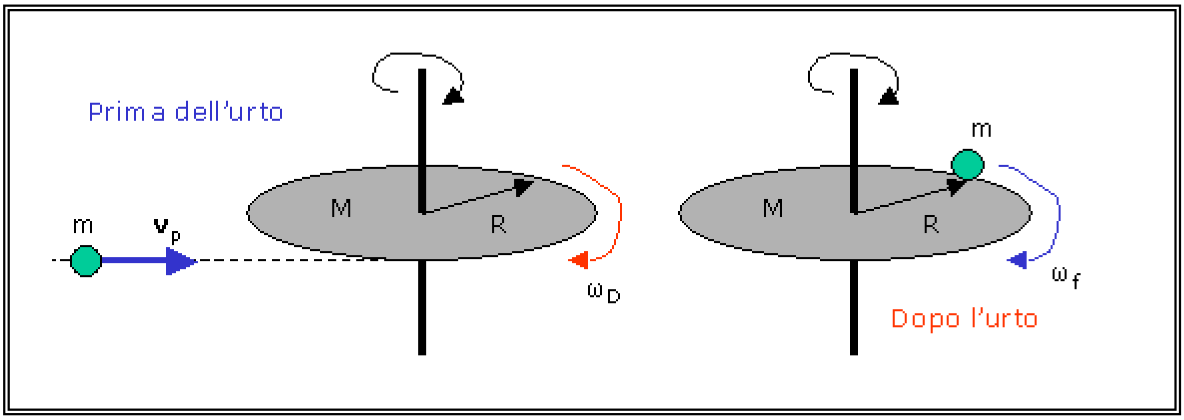
$$\omega_D = \frac{2m}{2m+M}\cdot\omega_p = \frac{2\cdot 0{,}1}{2\cdot 0{,}1+10}\cdot 50 = 0{,}98 rad/s \qquad \text{dove:} \qquad \omega_p = \frac{V_p}{R} = \frac{50}{1} = 50 rad/s$$

mentre, la velocità tangenziale sarà:

$$v_D = \omega_D\cdot R = 0{,}98\cdot 1 = 0{,}98 m/s$$

PROBLEMA N.5

Risolvere il problema precedente nel caso in cui il disco abbia una velocità angolare ω = 2 rad/s in verso contrario al moto imposto dal proiettile.



SOLUZIONE

Poiché siamo nelle stesse condizioni del problema precedente, possiamo applicare il principio di conservazione del momento angolare:

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \Rightarrow I_i\omega_i = I_f\omega_f \Rightarrow m\cancel{R}^2\omega_p - \frac{M\cancel{R}^2}{2}\cdot\omega_D = m\cancel{R}^2\omega_f + \frac{M\cancel{R}^2}{2}\omega_f \Rightarrow \frac{2m\omega_p - M\omega_D}{\cancel{2}} = \frac{2m+M}{\cancel{2}}\cdot\omega_f \qquad (1)$$

dove:

- i momenti d'inerzia iniziale I_i e finale I_f sono la somma dei momenti d'inerzia iniziale e finale del proiettile e del disco;
- il segno negativo del momento d'inerzia del disco indica che il moto del disco avviene in senso contrario a quello del proiettile.

Risolvendo la (1) rispetto ad ω_f, calcoliamo la velocità angolare del sistema disco + proiettile dopo l'urto:

$$\omega_f = \frac{2m\omega_p - M\omega_D}{2m+M} = \frac{2\cdot 0{,}1\cdot 50 - 10\cdot 2}{2\cdot 0{,}1 + 10} = -0{,}98\,\text{rad/s} \qquad \text{dove:} \qquad \omega_p = \frac{V_p}{R} = \frac{50}{1} = 50\,\text{rad/s}$$

mentre la velocità tangenziale sarà:

$$v = \omega_f\cdot R = -0{,}98\cdot 1 = -0{,}98\,\text{m/s}$$

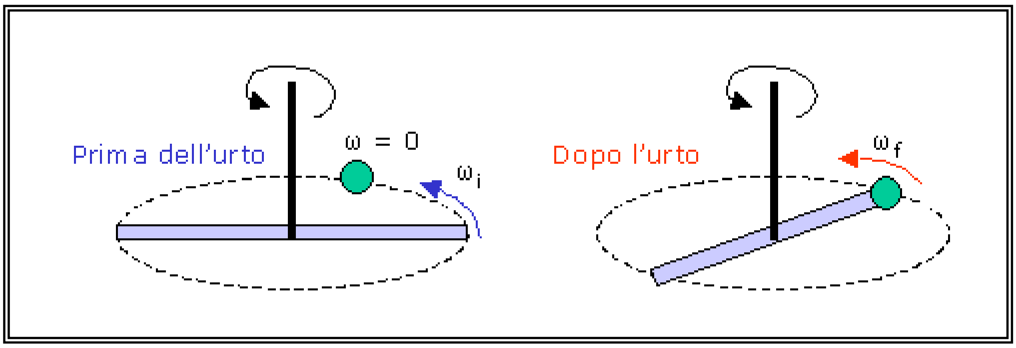
Il segno meno indica che il sistema disco + proiettile dopo l'urto ruota nel verso iniziale di rotazione del disco.

PROBLEMA N.6

Un'asta lunga L = 1m e di massa M = 5 kg, che ruota in un piano orizzontale appesa ad un filo che passa per il suo centro con velocità angolare ω_i = 1 rad/s, urta una piccola sfera di massa m = 0,5 kg in quiete. Dopo l'urto i due corpi rimangono incastrati.

Determinare la velocità angolare e tangenziale del sistema dopo l'urto, considerando la sfera come un punto materiale.

SOLUZIONE



Nell'ipotesi che il momento torcente delle forze agenti sul sistema sia nullo, possiamo applicare il principio di conservazione del momento angolare:

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \Rightarrow I_i\omega_i = I_f\omega_f \Rightarrow \frac{ML^2}{12}\omega_i = mR^2\omega_f + \frac{ML^2}{12}\omega_D \Rightarrow \frac{ML^2}{12}\omega_i = \frac{12mR^2 + ML^2}{12}\omega_f \quad (1)$$

dove:

- il momento d'inerzia finale I_f è la somma dei momenti d'inerzia dell'asta e del punto materiale;
- il momento d'inerzia di una sbarra sottile di massa M e lunghezza L che ruota rispetto ad un asse perpendicolare alla sbarra e passante per il suo centro e quello di un punto materiale m che ruota su una circonferenza di raggio R, sono:
-

$$I = \frac{MR^2}{2} \qquad I = mR^2$$

Risolvendo la (1) rispetto ad ω_f, calcoliamo la velocità angolare del sistema asta + massa:

$$\omega_f = \frac{ML^2}{12mR^2 + ML^2}\cdot\omega_i = \frac{5\cdot 1^2}{12\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5^2 + 5\cdot 1^2} = 0{,}77\,rad/s$$

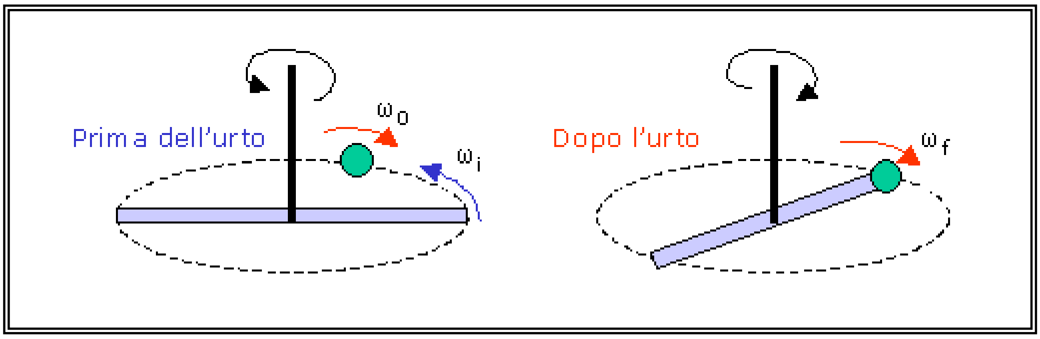
mentre la velocità tangenziale è:

$$v = \omega_f \cdot R = 0{,}77\cdot 0{,}5 = 0{,}38\,m/s$$

PROBLEMA N.7

Risolvere il problema precedente nel caso in cui la sfera abbia una velocità angolare ω_0 = -5 rad/s (la velocità angolare è diretta in verso contrario al moto dell'asta)

SOLUZIONE



Poiché siamo nelle stesse condizioni del problema precedente, possiamo applicare il principio di conservazione del momento angolare:

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \Rightarrow I_i\omega_i = I_f\omega_f \Rightarrow \frac{ML^2}{12}\omega_i - mR^2\omega_0 = mR^2\omega_f + \frac{ML^2}{12}\omega_D \Rightarrow$$
$$\frac{ML^2\omega_i - 12mR^2\omega_0}{12} = \frac{12mR^2 + ML^2}{12}\omega_f$$

dove:

- i momenti d'inerzia iniziale I_i e finale I_f sono la somma dei momenti d'inerzia iniziale e finale della massa e dell'asta;
- il segno negativo del momento d'inerzia della massa indica che il moto della massa avviene in senso contrario a quello dell'asta.

Pertanto, la velocità angolare ω_f del sistema asta + massa si calcola come:

$$\omega_f = \frac{ML^2\omega_i - 12mR^2\omega_0}{12mR^2 + ML^2} \cdot \omega_i = \frac{5 \cdot 1^2 \cdot 1 - 12 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5^2 \cdot 5}{12 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5^2 + 5 \cdot 1^2} = -0{,}38 \text{rad/s}$$

mentre la velocità tangenziale è:

$$v = \omega_f \cdot R = -0{,}38 \cdot 0{,}5 = 0{,}19 \text{m/s}$$

Il segno meno indica che il sistema asta + massa dopo l'urto ruota nel verso contrario a quello iniziale dell'asta.