

QUESITI DI FISICA RISOLTI A LEZIONE

MECCANICA

Un'auto viaggia percorrendo 40 km alla velocità di 60 km/h e successivamente percorrendo 80 km alla velocità di 40 km/h. La sua velocità media è

[a] 40 km/h

[b] 45 km/h

[c] 60 km/h

[d] 50 km/h

[e] 55 km/h

Soluzione. Ricordiamo la definizione di velocità media:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} .$$

I tempi di percorrenza parziali sono dati da

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x_1}{v_1}, \quad \Delta t_2 = \frac{\Delta x_2}{v_2}$$

per cui l' espressione della velocità media è data da

$$\bar{v} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta x_1/v_1 + \Delta x_2/v_2}$$

Inserendo i dati del problema avremo

$$\bar{v} = \frac{40 + 80}{40/60 + 80/40} = \frac{120}{2/3 + 2} = 45 \text{ km/h} .$$

Risposta corretta [b].

Un corpo possiede velocità iniziale pari a -3 m/s e, dopo un certo tempo, assume la velocità di 5 m/s. Sapendo che l' accelerazione media in tale intervallo di tempo è 5 m/s², il tempo intercorso è

[a] 3 s

[b] 5 s

[c] 1 s

[d] $0,4$ s

[e] $1,6$ s

Soluzione Per definizione abbiamo

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad ,$$

dove $\Delta v \equiv v_2 - v_1 = 5 - (-3) = 8$ m/s. La risposta è quindi data dalla semplice formula

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{\bar{a}} = \frac{8}{5} = 1,6 \quad \text{s} .$$

Risposta corretta [e].

Due corpi A e B, di masse 10 kg e 5 kg, sono lasciati cadere dalla stessa altezza con velocità iniziale nulla. Trascurando la resistenza dell'aria, essi raggiungono il suolo in tempi, il cui rapporto, t_A/t_B è

[a] 1/2

[b] 0.71

[c] 1

[d] 1.41

[e] 2

Soluzione. Il moto di caduta è *uniformemente accelerato*:

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$$

con $v_0 = 0$, $x_0 = 0$. Pertanto la legge oraria si riduce a

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \quad .$$

I tempi di caduta t_A e t_B dei due corpi, che cadono dalla stessa altezza h sono quindi

$$t_A = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad , \quad t_B = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad ,$$

e risultano uguali. Risposta corretta [c].

Due automobili percorrono un circuito circolare con velocità in modulo costante. Se la prima automobile impiega un tempo doppio rispetto alla seconda per compiere un giro, il rapporto delle loro rispettive accelerazioni è pari a

[a] $a_1/a_2 = 1/2$

[b] $a_1/a_2 = 2$

[c] $a_1/a_2 = 1$

[d] $a_1/a_2 = 1/4$

[e] $a_1/a_2 = 4$

Soluzione. Nel moto circolare uniforme l' accelerazione di ciascuna automobile è legata alla rispettiva velocità da

$$a_1 = \frac{v_1^2}{r} \quad , \quad a_2 = \frac{v_2^2}{r} \quad ,$$

dove r è il raggio della circonferenza. Avremo quindi

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{v_1^2}{r} \times \frac{r}{v_2^2} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^2 \quad .$$

Resta da legare il rapporto delle velocità al rapporto dei tempi di percorrenza del circuito (il *periodo*). Avremo

$$t_1 = \frac{2\pi r}{v_1} \quad , \quad t_2 = \frac{2\pi r}{v_2} \longrightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} \quad .$$

In conclusione

$$\frac{a_1}{a_2} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^2 = \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Risposta corretta [d].

In un moto circolare uniforme, per raddoppiare l'accelerazione mantenendo invariata la velocità angolare, occorre

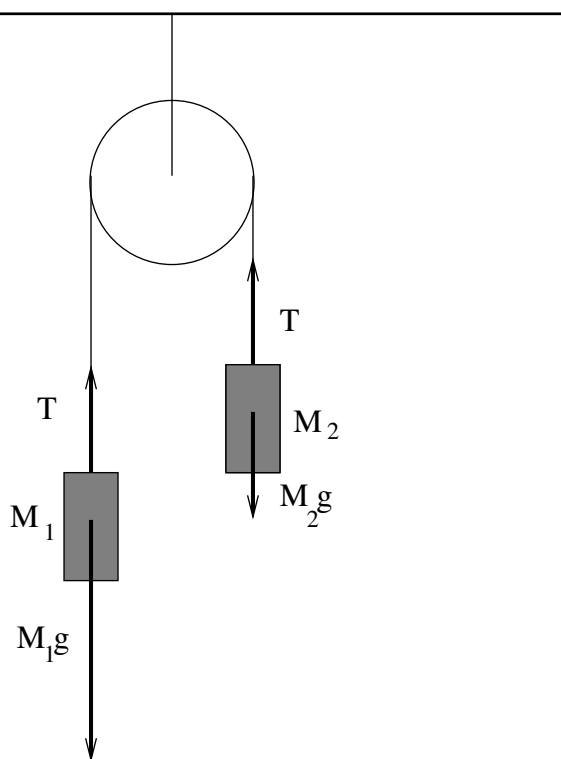
- [a] raddoppiare il raggio
- [b] dimezzare il raggio
- [c] raddoppiare la velocità
- [d] dimezzare il periodo
- [e] raddoppiare la frequenza

Soluzione. La relazione tra accelerazione centripeta, velocità angolare e raggio della traiettoria è

$$a_c = \omega^2 r \quad ,$$

da cui segue immediatamente che la risposta corretta è [a].

Come cadere dolcemente: meccanica del contrappeso



Un corpo M_1 collegato ad un contrappeso $M_2 < M_1$.

Consideriamo i due blocchi uno per uno. Sul blocco di sinistra, di massa M_1 , agiscono la forza peso M_1g rivolta verso il basso, e la forza T rivolta verso l'alto, dovuta alla *tensione* della fune. Una identica forza agisce verso l'alto sul blocco di destra, che ha massa M_2 e peso M_2g . Se a_1 e a_2 sono le accelerazioni dei due blocchi, scriviamo per ciascuno di essi l'equazione di Newton

$$(1a) \quad M_1 a_1 = M_1 g - T ,$$

$$(1b) \quad M_2 a_2 = M_2 g - T .$$

In queste due equazioni abbiamo tre incognite: la tensione T della fune, e le due accelerazioni a_1 e a_2 dei blocchi. Osserviamo, tuttavia, che essendo la fune *inestensibile*, di tanto scende il blocco

1, quanto sale il blocco 2, in altri termini avremo

$$y_1(t) = -y_2(t) .$$

Derivando due volte otteniamo

$$(2) \quad a_1 = \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} = -\frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} = -a_2 ,$$

ovvero le accelerazioni dei due blocchi sono uguali in valore assoluto e di verso opposto. Poniamo $a \equiv |a_1| = |a_2|$. Le equazioni (1a) e (1b) diventano

$$(3a) \quad M_1 a = M_1 g - T ,$$

$$(3b) \quad -M_2 a = M_2 g - T .$$

Risolvendo la seconda equazione rispetto a T otteniamo

$$T = M_2 (g + a) ,$$

e inserendo questa espressione nella (3a)

$$M_1 a = M_1 g - M_2 g - M_2 a .$$

Risolvendo rispetto al modulo dell' accelerazione a otteniamo infine

$$(4) \quad \boxed{a = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} g} .$$

N.B. Per $M_1 = M_2$ otteniamo dalla relazione (4) $a = 0$. Quando le due masse, e quindi le due forze peso, sono uguali il sistema *resta in equilibrio*. Il peso del blocco 1 equilibra quello del blocco 2, e viceversa. Per $M_1 \sim M_2$ l' accelerazione è *molto piccola*: il blocco di destra sale lentamente, e quello di sinistra scende dolcemente frenato dal contrappeso M_2 . Se, infine, $M_1 \gg M_2$, allora $a \simeq g$; il contrappeso ha poco effetto e il blocco 1 scende quasi con la stessa accelerazione che avrebbe se cadesse liberamente.

Un uomo di 70 kg, salendo le scale, raggiunge l'altezza di 5 m in 5 s. La potenza meccanica sviluppata dai suoi muscoli è

[a] 686 W s^{-1}

[b] 686 W

[c] 686 J

[d] 9.8 J

[e] 9.8 W kg^{-1}

Soluzione I muscoli dell' uomo lavorano *contro* la forza-peso, e il lavoro compiuto da quest' ultima è pari alla variazione dell' energia potenziale:

$$L = mgh_1 - mgh_2 \quad .$$

L' uomo nel salire compie pertanto un lavoro eguale e opposto:

$$L_m = mgh_2 - mgh_1 \equiv mg\Delta h \quad .$$

Questo lavoro è compiuto nel tempo Δt per cui la potenza sviluppata è

$$P = \frac{mg\Delta h}{\Delta t} = \frac{70 \times 9,81 \times 5}{5} = 686 \text{ W} \quad .$$

Risposta corretta [b].

Un corpo, appoggiato su di un piano orizzontale privo di attrito, è legato ad una corda, incernierata ad un punto del piano, e descrive attorno ad esso un moto circolare uniforme. In tal caso l'energia cinetica del corpo non varia perchè

- [a] La forza agente sul corpo è conservativa.
- [b] La forza agente sul corpo è nulla.
- [c] La forza agente sul corpo è ortogonale alla traiettoria
- [d] La forza centripeta è annullata dalla forza centrifuga
- [e] La forza peso è annullata dalla reazione vincolare del piano di appoggio

Soluzione. Ricordiamo che la velocità deve essere tangente alla traiettoria, e tale sarà allora anche lo spostamento elementare $d\vec{s} = \vec{v}dt$. D'altra parte la forza centripeta che vincola il corpo alla traiettoria è perpendicolare ad essa, e quindi

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad .$$

Per un lavoro finito si ottiene quindi

$$L = \int_i^f dL = 0 \quad .$$

Applichiamo per finire il *teorema lavoro-energia*

$$L = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = 0 \quad ,$$

che implica $v_f = v_i = \text{costante}$. Risposta corretta [c].

Applicazione del teorema lavoro-energia. Come *scala* la velocità di un animale nella corsa ?

Soluzione. Il lavoro svolto dai muscoli degli arti è dato dal prodotto della forza muscolare per la contrazione Δx dei muscoli stessi:

$$L \propto F \times \Delta x \quad .$$

La forza F scala come la sezione dei muscoli che a sua volta scala come le dimensioni D^2 dell' animale, mentre avremo $\Delta x \propto D$. In conclusione

$$L \propto D^2 \times D = D^3$$

Il lavoro muscolare viene convertito in energia cinetica $\frac{1}{2}mv^2$:

$$L = \frac{1}{2}mv^2$$

da cui avremo che v^2 scalerà come il rapporto tra L e m :

$$v^2 \propto \frac{L}{m} \quad .$$

Ora la massa sarà proporzionale al volume dell' animale, per cui $m \propto D^3$. In definitiva v^2 scala come il rapporto di L e m :

$$v^2 \propto \frac{L}{m} \propto \frac{D^3}{D^3} = 1 \quad .$$

La velocità che l' animale raggiunge nella corsa è *indipendente dalle sue dimensioni*. Animali di forma simile e dimensioni molto diverse possono correre alla stessa velocità.

Quali sono le proprietà che caratterizzano le forze conservative?

- I. Non producono variazioni di energia cinetica
- II. Non producono variazioni di energia potenziale
- III. Non producono variazioni dell'energia totale
- IV. Il lavoro compiuto è sempre nullo, qualunque sia la traiettoria
- V. Il lavoro compiuto è nullo, quando il corpo ritorna al punto di partenza

[a] I, II, IV

[b] I, II, V

[c] I, II, III

[d] III, IV

[e] III, V

Soluzione. Ricordiamo che sotto l'azione di una forza conservativa ciò che non varia durante il moto è l'energia meccanica totale del corpo:

$$E.M. \equiv K + U = \text{cost.} \quad .$$

Inoltre, il lavoro da essa svolto dipende solo dai valori iniziale e finale dell'energia potenziale, per cui è zero per un percorso chiuso:

$$L = U_i - U_f = 0 \quad \text{se } i = f \quad .$$

Risposta corretta [e].

Due cariche elettriche inizialmente alla distanza di 1 m, vengono portate a distanza di 10 cm. La forza elettrostatica è

- [a] aumentata di 10 volte
- [b] diminuita di 10 volte
- [c] aumentata di 100 volte
- [d] diminuita di 100 volte
- [e] invariata

Soluzione. Si tratta di una applicazione diretta della *legge di Coulomb*; applicandola alle due situazioni si ottiene

$$F_1 = K \frac{q_1 q_2}{r_1^2} \quad F_2 = K \frac{q_1 q_2}{r_2^2} \quad .$$

Facendo il rapporto troviamo

$$\frac{F_2}{F_1} = K \frac{q_1 q_2}{r_2^2} \times \frac{r_1^2}{K q_1 q_2} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 = \left(\frac{1}{10^{-1}} \right)^2 = 100 \quad .$$

Risposta corretta [c].

Due cariche puntiformi

$$(Q_1 = 10^{-5} \text{ C}, Q_2 = -10^{-4} \text{ C})$$

si trovano alla distanza di 1 m. Quale lavoro deve essere fatto per allontanarle fino alla distanza di 3 m?

[a] -4 J

[b] 6 J

[c] 8 J

[d] - 8 J

[e] 6 W

Soluzione. Poichè la forza elettrica è conservativa, calcoleremo intanto il lavoro *fatto dalla forza elettrica* attraverso la variazione di energia potenziale:

$$\begin{aligned} L = U_i - U_f &= K \frac{Q_1 Q_2}{r_1} - K \frac{Q_1 Q_2}{r_2} = \\ &= K Q_1 Q_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) , \end{aligned}$$

ovvero coi dati della domanda

$$\begin{aligned} L &= -9 \times 10^9 \times 10^{-5} \times 10^{-4} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \\ &= -9 \times \frac{2}{3} = -6 \text{ J} . \end{aligned}$$

Questo è il lavoro fatto dalla forza elettrica, che si oppone all' allontanamento delle cariche. Per allontanarle quindi *l' agente che le separa deve compiere un lavoro*

$$L_e = -L = 6 \text{ J} .$$

Risposta corretta [b].

Una conseguenza della gravitazione universale: La estinzione dei dinosauri

Un asteroide di raggio R_a pari a 1 km, partendo da grande distanza dalla Terra praticamente fermo, viene attratto dal campo gravitazionale terrestre. Si calcoli l'energia con cui l'asteroide giunge a colpire la superficie terrestre.

Soluzione

Premessa .Due corpi di massa m_1 e m_2 a distanza R l'uno dall'altro *si attraggono* con la forza *gravitazionale* (*gravitazione universale* di Newton)

$$F = G \frac{m_1 m_2}{R^2} ,$$

dove la *costante di gravitazione universale* G vale

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} .$$

Questa legge ha la stessa forma della legge di Coulomb, per cui anche la forza di attrazione gravitazionale è *conservativa*, con energia potenziale data da

$$U = -G \frac{m_1 m_2}{R} .$$

Ciò premesso calcoliamo il lavoro fatto dalla forza di gravità sull'asteroide:

$$L = U_i - U_f = -G \frac{M_T M_a}{R_i} + G \frac{M_T M_a}{R_T} ,$$

dove $M_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg è la massa della Terra, M_a la massa dell'asteroide, e $R_T = 6,38 \times 10^6$ m il raggio terrestre. Poichè $R_i \sim \infty$ (l'asteroide parte da molto lontano) il primo termine nell'espressione del lavoro vale zero, e rimane:

$$L = G \frac{M_T M_a}{R_T} .$$

Questo lavoro si trasforma in energia cinetica dell' asteroide (*conservazione dell' energia*) per cui

$$G \frac{M_T M_a}{R_T} = K_f - K_i = K_f \quad ,$$

in quanto l' asteroide parte con velocità nulla.

La massa dell' asteroide si calcola sapendo che la densità del materiale meteoritico vale circa $\rho_a = 7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. Ricordando che

$$\rho_a \equiv \frac{M_a}{V_a}$$

con $V_a = \frac{4}{3}\pi R_a^3$ otteniamo

$$K_f = G \frac{M_T}{R_T} \frac{4}{3}\pi R_a^3 \rho_a \quad .$$

Inserendo i dati del problema otteniamo che l' energia sviluppata al momento dell' impatto (pari a tutta l' energia cinetica dell' asteroide) è

$$E = 183,22 \times 10^{19} \quad \text{J}$$

L' energia liberata in grandi esplosioni si può esprimere in *Megatoni* (Mt):

$$1 \text{ Mt} \equiv 4,2 \times 10^{15} \quad \text{J} \quad .$$

Dividendo E per questo numero abbiamo che l' energia sviluppata al momento dell' impatto è pari a $44 \times 10^4 \text{ Mt}$.

L' impatto dell' asteroide equivale allo scoppio simultaneo di 440,000 bombe all' idrogeno da 1 Mt ciascuna.

In un moto armonico, durante un ciclo, la velocità

[a] si annulla due volte

[b] non si annulla mai

[c] si annulla una volta

[d] si annulla quattro volte

[e] si annulla otto volte

Soluzione. La velocità varia nel tempo secondo la legge

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi) \quad .$$

Assumiamo per semplicità la fase iniziale eguale a zero: $\varphi = 0$ e chiediamoci quante volte si annulli la funzione coseno per $0 \leq t \leq T = \frac{2\pi}{\omega}$. Abbiamo

$$v(t) = A\omega \cos \omega t = 0$$

per

$$\omega t = \frac{\pi}{2} \longrightarrow t_1 = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{1}{4} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{T}{4} \quad ,$$

e per

$$\omega t = \frac{3}{2}\pi \longrightarrow t_2 = \frac{3\pi}{2\omega} = \frac{3}{4} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{3}{4}T \quad .$$

La velocità si annulla quindi a un quarto e a tre quarti di periodo.
Risposta corretta [a].

Durante un moto armonico, l' accelerazione del corpo si annulla ogni 0.25 s. La frequenza del moto vale

[a] 1/2 Hz

[b] 4 Hz

[c] 6.28 Hz

[d] 2 Hz

[e] 12.56 Hz

Soluzione. Come per la velocità, in un periodo l' accelerazione si annulla due volte, come si ha dalla sua espressione:

$$a(t) = -A\omega^2 \sin \omega t \equiv -\omega^2 x(t) \quad ,$$

a intervalli di tempo di mezzo periodo. Quindi nel caso presente avremo

$$\frac{T}{2} = 0,25 \text{ s} \longrightarrow T = 0,5 \text{ s} \quad .$$

Poichè $T \equiv \frac{1}{f}$ avremo infine

$$f = \frac{1}{T} = 2 \text{ Hz} \quad .$$

Risposta corretta [d].

Una palla di massa m urta contro un muro con velocità v perpendicolare ad esso. Dopo l'urto la velocità della palla

[a] è rimasta invariata

[b] è opposta a quella che la palla aveva prima dell'urto

[c] è pari a $\frac{v}{2}$

[d] è pari a $-\frac{v}{2}$

[e] vale $2v$

Soluzione. Al momento dell'urto agiscono forze reciproche tra palla e muro, e l'effetto della forza peso è trascurabile. Possiamo in linea di principio ricorrere alla conservazione della quantità di moto. Tuttavia poichè il muro è solidale alla Terra, che rispetto alla palla costituisce un sistema di massa praticamente infinita, dovremmo prima considerare l'urto elastico tra due corpi di masse diverse, e poi il caso limite in cui una delle masse tende all'infinito. Qui ci limiteremo a osservare che di fatto la palla rimbalza per effetto delle forze (per lei esterne) esercitate dal muro, e che per la natura elastica dell'urto possiamo applicare la conservazione dell'energia cinetica:

$$K_f = \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}mv^2 = K_i \quad ,$$

il che implica

$$v' = -v \quad .$$

Dopo l'urto la palla rimbalza con velocità opposta a quella di incidenza. Risposta corretta [b].

N. B. Il momento trasferito dal muro alla palla è

$$\Delta P = -mv - mv = -2mv \quad .$$

Se l'urto avviene in un intervallo di tempo Δt la forza esercitata dal muro sulla palla è

$$F_{palla} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = -2\frac{mv}{\Delta t} \quad .$$

Per la terza legge della dinamica al muro viene applicata una forza eguale e opposta:

$$F_{muro} = -F_{palla} = 2\frac{mv}{\Delta t} \quad .$$

In teoria cinetica dei gas la pressione esercitata sulle pareti di un recipiente viene interpretata come il risultato complessivo del bombardamento molecolare sulle stesse.

Un giocatore di biliardo lancia una biglia A con velocità v contro una biglia B identica alla prima, inizialmente ferma. Le due biglie si urtano frontalmente. Dopo l'urto le velocità delle due biglie valgono

[a] $v'_A = v_A, v'_B = v_A$

[b] $v'_A = v_A, v'_B = 0$

[c] $v'_A = 0, v'_B = v_A$

[d] $v'_A = 0, v'_B = 0$

[e] per rispondere è necessario conoscere la massa delle biglie

Soluzione. Le forze in gioco sono: il peso delle biglie e le forze di contatto che si fanno equilibrio, e le forze tra le due biglie al momento dell'urto. Possiamo quindi usare la *conservazione della quantità di moto*. Inoltre, sia prima che dopo l'urto le biglie si muovono di moto rettilineo uniforme e, in condizioni di urto centrale, tutto avviene lungo una retta, per cui possiamo trascurare la natura vettoriale delle velocità. Avremo:

$$P_i = mv_A = mv'_A + mv'_B = P_f \quad .$$

Inoltre, l'energia cinetica non potrà che ridistribuirsi tra i due oggetti (urto elastico), pertanto dalla *conservazione dell'energia*

$$K_i = \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_A'^2 + \frac{1}{2}mv_B'^2 = K_f \quad .$$

I fattori numerici si possono semplificare, e così pure le masse. Le due equazioni si riscrivono allora

$$v_A = v'_A + v'_B \quad ,$$

$$v_A^2 = v_A'^2 + v_B'^2 \quad ,$$

ovvero

$$v'_B = v_A - v'_A$$

$$v_B'^2 = v_A^2 - v_A'^2 = (v_A - v'_A)(v_A + v'_A) \quad .$$

Sostituendo la prima equazione nella seconda otteniamo

$$v_B'^2 = v_B' (v_A + v_A') \quad ,$$

che, semplificando v_B' porge

$$v_B' = v_A + v_A' \quad .$$

Abbiamo così ricondotto il problema alla soluzione delle due equazioni

$$v_B' = v_A - v_A' \quad ,$$

$$v_B' = v_A + v_A' \quad .$$

Sommando la prima alla seconda si ottiene immediatamente

$$v_B' = v_A \quad v_A' = 0 \quad .$$

Dopo l' urto *la biglia proiettile è ferma e quella bersaglio prosegue con la velocità che aveva A prima dell' urto*. Risposta corretta [c].

Un uomo di massa $M = 70$ kg prende la rincorsa e salta, con velocità $v = 2$ m/s, su uno slittino fermo di massa $m = 30$ kg. Lo slittino con l' uomo a bordo si muoverà con velocità

[a] 2 m/s

[b] 0 m/s

[c] 0,71 m/s

[d] 1,4 m/s

[e] 1 m/s

Soluzione. Possiamo usare ancora la conservazione della quantità di moto totale, perchè intervengono solo forze reciproche tra l' uomo e lo slittino:

$$P_i = Mv = P_f = (m + M) v' \quad .$$

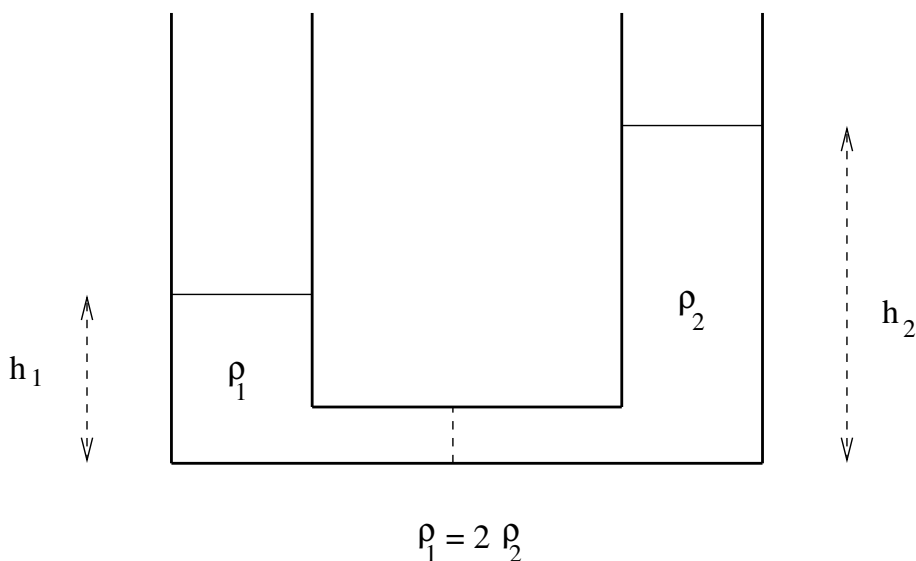
La velocità dopo che l' uomo ha afferrato lo slittino è pertanto

$$v' = \frac{M}{m + M} v = \frac{70}{30 + 70} \times 2 = 1,4 \text{ m/s}.$$

Risposta corretta [d].

In due vasi comunicanti sono contenuti due liquidi non miscibili, e il primo ha densità doppia del secondo. Il rapporto $\frac{h_1}{h_2}$ fra le rispettive altezze rispetto alla superficie di separazione dei due liquidi è

- [a] 1/4
- [b] 1/2
- [c] 1
- [d] 2
- [e] 4



Soluzione. Supponiamo che il liquido 1 sia contenuto nel recipiente di sinistra, e il liquido 2 in quello di destra. Sul fondo dei due recipienti, che comunicano tra loro attraverso un condotto, deve esserci la *stessa pressione* P (legge di Pascal). Alla superficie dei liquidi insiste la pressione atmosferica P_0 . Avremo per la legge di Stevin

$$\Delta P = P - P_0 = \rho_1 g h_1 \quad ,$$

$$\Delta P = P - P_0 = \rho_2 g h_2 \quad ,$$

l' aumento di pressione dovendo essere lo stesso per i due liquidi.

Uguagliando le due espressioni si ottiene

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 \quad ,$$

da cui

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1}{2} \quad .$$

La colonna liquida a sinistra, dove si trova il liquido più denso, è alta la metà di quella a destra. Risposta corretta [b].

Dall' interno di un batiscafo viene misurata la pressione esterna, e il risultato è 20 MPa. Si stimi a quale profondità si trova il batiscafo [Si assuma per l' acqua marina la densità $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$].

[a] 2 km

[b] 2 m

[c] 200 m

[d] 200 km

[e] 20 m

Soluzione. Dalla legge di Stevin l' aumento di pressione rispetto alla superficie del mare è

$$\Delta P = \rho g h \quad .$$

Risolvendo rispetto alla profondità h otteniamo

$$h = \frac{\Delta P}{\rho g} \simeq \frac{20 \times 10^6}{10^3 \times 10} = 2000 \text{ m}.$$

Risposta corretta [a].

N.B. Attenzione alla conversione della densità in unità SI:

$$\frac{1 \text{ g}}{\text{cm}^3} = \frac{10^{-3} \text{ kg}}{10^{-6} \text{ m}^3} = \frac{10^3 \text{ kg}}{\text{m}^3} \quad .$$

Un corpo di massa 500 g viene immerso in acqua ed il suo peso apparente diviene un terzo di quello in aria. La densità del corpo, rispetto a quella dell' acqua, è

[a] 2

[b] 1,5

[c] 1

[d] 0,5

[e] 0,1

Soluzione. Ricordiamo che il peso apparente è la differenza tra peso del corpo e spinta di Archimede:

$$P_a = \rho_c V g - \rho_F V g = \frac{1}{3} \rho_c V g \quad ,$$

dove, nell' esprimere il peso proprio del corpo abbiamo scritto la sua massa come $m_c = \rho_c V$. Una volta semplificati i fattori comuni V e g rimane

$$\rho_c - \frac{1}{3} \rho_c = \rho_F \quad ,$$

ovvero $\frac{2}{3} \rho_c = \rho_F$, $\rho_c = \frac{3}{2} \rho_F$. Risposta corretta [b].

In un condotto orizzontale a sezione variabile scorre dell' acqua. Trascurando le forze viscosse la pressione nel condotto

[a] è maggiore dove la sezione è più piccola

[b] è minore dove la sezione è più piccola

[c] è uguale in tutti i punti del condotto

[d] è maggiore dove è maggiore la portata

[e] è minore dove è minore la portata

Soluzione. In assenza di attriti possiamo applicare la conservazione dell' energia, ovvero il *teorema di Bernoulli*:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh$$

dove con 1 e 2 abbiamo indicato due punti diversi del condotto, di sezione A_1 e A_2 , e abbiamo tenuto conto del fatto che il condotto è orizzontale. Semplificando il termine idrostatico rimane

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad .$$

Le velocità v_1 e v_2 nei due punti del condotto sono legate dalla *conservazione della portata*:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad .$$

Vediamo che, se $A_1 > A_2$ deve essere $v_1 < v_2$, il *fluido si muove più lentamente dove il condotto è più largo*.

Torniamo al teorema di Bernoulli: il termine $\frac{1}{2}\rho v_1^2$ è minore di $\frac{1}{2}\rho v_2^2$, per cui dovremo avere $p_1 > p_2$. Contrariamente a quanto ci si aspetterebbe, *la pressione è minore dove la sezione del condotto è più piccola*. Risposta corretta [b].

Una spiegazione qualitativa del risultato è la seguente: dove il condotto si restringe il fluido deve muoversi più velocemente per mantenere invariata la portata. Questo significa che la sua energia cinetica deve aumentare. Questo aumento di energia cinetica può avvenire solo a spese della pressione, che pertanto cala.

Per un corpo che si muove nell'aria a piccola velocità, la forza che frena il corpo è data dalla legge di Stokes. Se il corpo, inizialmente fermo, cade

[a] la velocità aumenta sempre proporzionalmente al tempo di caduta

[b] la velocità aumenta inizialmente e poi rimane costante

[c] l'accelerazione è costante

[d] l'accelerazione è proporzionale alla velocità

[e] l'accelerazione aumenta con la distanza percorsa

Soluzione. Non appena si mette in moto, il corpo è soggetto a tre forze: la forza-peso, la spinta di Archimede e la resistenza viscosa dell'aria. All'aumentare di v la forza resistente aumenta, finché, ad un *valore limite* della velocità, v_l , *farà equilibrio*, assieme alla spinta di Archimede, al peso del corpo. Assumendo $\rho_f \ll \rho_c$, trascureremo la spinta di Archimede. Avremo perciò per un corpo di forma sferica

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_c g - 6\pi\eta v_l r = ma = 0 \quad ,$$

dove r è il raggio del corpo, η la viscosità del fluido, e abbiamo scritto la massa del corpo come densità per volume

$$m_c = \rho_c V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_c \quad .$$

Da questo momento in poi il corpo scende con velocità costante pari a

$$v_l = \frac{2}{9} \frac{\rho_c g}{\eta} r^2 \quad .$$

Risposta corretta [b].

N.B. Queste considerazioni spiegano perchè le gocce di pioggia giungono al suolo con velocità moderata, e descrivono la discesa di piccoli corpi dispersi in un liquido (ad. es. i globuli rossi nel plasma sanguigno → sedimentazione). In quest' ultimo caso $\rho_c \sim \rho_f$, la spinta di Archimede, che si sottrae al peso, non si può trascurare, e l' espressione di v_l viene sostituita da

$$v_l = \frac{2(\rho_c - \rho_f)g}{9\eta} r^2 \quad .$$

Per piccoli r la velocità di sedimentazione può essere molto piccola.

Complemento. Si discuta *la fase transitoria* nella sedimentazione, durante la quale il corpo che cade nel fluido aumenta la velocità sino a raggiungere la *velocità limite*.

Soluzione. Scriviamo l'equazione di Newton in presenza della forza viscosa e della forza-peso ricordando che $F = md^2y/dt^2$:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = mg - kv(t) \quad ,$$

con $k \equiv 6\pi\eta r$ (legge di Stokes).

Convien scrivere la accelerazione come *derivata della velocità* rispetto al tempo, e dividere tutto per m :

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{k}{m}v(t) \quad ,$$

che è una equazione differenziale del primo ordine nella funzione incognita $v(t)$. Questa equazione si può risolvere per *separazione di variabili*:

$$\frac{dv}{g - \frac{k}{m}v} = dt \quad .$$

Integrando ambo i membri avremo che *le primitive coincideranno a meno di una costante arbitraria*:

$$\int \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v} = t + C_1 \quad .$$

L' integrale a sinistra si calcola riportando l' integrando alla forma f'/f :

$$-\frac{m}{k} \int \frac{d\left(g - \frac{k}{m}v\right)}{g - \frac{k}{m}v} = -\frac{m}{k} \ln \left(g - \frac{k}{m}v\right) + C_2 \quad ,$$

da cui

$$-\frac{m}{k} \ln \left(g - \frac{k}{m}v\right) + C_2 = t + C_1 \quad .$$

$$\ln \left(g - \frac{k}{m}v \right) = -\frac{k}{m}t - \frac{k}{m}(C_1 - C_2) \quad .$$

La quantità $-\frac{k}{m}(C_1 - C_2)$ rappresenta una *costante arbitraria* che possiamo chiamare semplicemente α . Esponenziando si ottiene infine:

$$g - \frac{k}{m}v = e^{-\frac{k}{m}t} \cdot e^{\alpha} \quad .$$

Nuovamente e^{α} altro non è che la *costante arbitraria* risultante dalla soluzione dell'equazione differenziale del primo ordine da cui siamo partiti. Chiamiamola $\beta \equiv e^{\alpha}$. Risolvendo rispetto a v otteniamo così la *relazione funzionale* tra la velocità v e il tempo:

$$v = \frac{m}{k}g - \frac{m}{k}\beta e^{-\frac{k}{m}t} \quad .$$

La costante di integrazione β si determina imponendo la *condizione iniziale* $v(t=0) = 0$:

$$\frac{m}{k}g - \frac{m}{k}\beta = 0 \quad ,$$

che implica $\beta = g$, per cui alla fine avremo

$$v(t) = \frac{m}{k}g \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) \quad ,$$

che rappresenta la relazione cercata.

N.B. Per $t \rightarrow \infty$ l'esponenziale tende a zero e si ha

$$v(t) \rightarrow \frac{mg}{k} \quad ,$$

che rappresenta appunto la *velocità limite*.